

Тематический выпуск журнала приурочен к 70-летию известного российского гидрофизика **Ефима Наумовича Пелиновского**. В выпуске собраны результаты исследований, отражающих современное состояние гидрофизической науки в области натурных и лабораторных измерений, аналитического и численного моделирования поверхностных и внутренних волн. Представлен обзор работ по трансформации поверхностных и внутренних гравитационных волн над донным уступом. Дана ревизия асимптотической процедуры вывода уравнения Кадомцева—Петвиашвили с вращением при учете фонового сдвигового течения и фоновой стратификации. Приведены результаты численных расчетов полей внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины по точным и асимптотическим формулам. Рассмотрены результаты аналитических и численных решений, а также лабораторных экспериментов, описывающих эволюцию уединенных волн над неровным дном. Исследована динамика и энергетика фронтального столкновения уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Рассмотрены особенности переноса жидких частиц при распространении длинных нелинейных локализованных волновых пакетов (бризеров) в рамках трех подходов: линейной, слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной моделей. С помощью модели, основанной на обобщенном уравнении Гарднера, исследована эволюция поля внутренних волн в Печорском море, в котором в качестве граничного условия использовалась измеренная форма внутреннего бора. В рамках трехмерной конечно-элементной гидростатической модели воспроизведена стационарная циркуляция, а также поверхностные и внутренние M_2 приливы в районе пролива Карские Ворота. Приводится сравнение данных измерений течений и температуры на бучах в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах, вертикальные смещения в которых вызваны полусуточными внутренними волнами.



ISSN 2073-6673 Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2015. Т. 8. № 3. С. 1-88.

Том 8
№ 3
2015

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОФИЗИКА

FUNDAMENTALNAYA
i PRIKLADNAYA
GIDROFIZIKA

<http://hydrophysics.info>



С.-Петербург
“НАУКА”

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Куркин А. А., Сёмин С. В., Степаняц Ю. А.</i> Трансформация поверхностных и внутренних волн над донным уступом. Обзор	3
<i>Гримшоу Р.</i> Влияние фонового течения в моделях длинных нелинейных внутренних волн (на англ. языке)	20
<i>Булатов В. В., Владимиров Ю. В.</i> Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины	24
<i>Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А.</i> Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом	32
<i>Мадерич В. С., Терлецкая Е. В., Бровченко И. А.</i> Фронтальное столкновение внутренних волн большой амплитуды	44
<i>Рувинская Е. А., Куркина О. Е., Куркин А. А., Наумов А. А.</i> Перенос частиц при распространении бризеров внутренних гравитационных волн	53
<i>Талипова Т. Г., Куркина О. Е., Наумов А. А., Куркин А. А.</i> Моделирование эволюции внутреннего бора в Печорском море	62
<i>Каган Б. А., Тимофеев А. А.</i> Моделирование стационарной циркуляции и полусуточных поверхностных и внутренних приливов в проливе Карские Ворота	72
<i>Морозов Е. Г.</i> Внутренние приливы и течения в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах	80
Поздравляем с юбилеем Ефима Наумовича Пелиновского!	85
Правила представления материалов в редакцию	87

CONTENTS

<i>Kurkin A. A., Semin S. V., Stepanyants Y. A.</i> Transformation of Surface and Internal Waves Over the Bottom Step. Review	3
<i>Grimshaw R.</i> Effect of a Background Shear Current on Models for Nonlinear Long Internal Waves	20
<i>Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.</i> Internal Gravity Waves Dynamics in Stratified Medium of Non-Uniform Depth	24
<i>Gavrilov N. V., Liapidevskii V. Yu., Liapidevskaya Z. A.</i> Transformation of Large Amplitude Internal Waves Over a Shelf	32
<i>Maderich V. S., Terletska K. V., Brovchenko I. A.</i> Head-on Collision of Internal Waves of Large Amplitudes	44
<i>Ruvinskaya E. A., Kurkina O. E., Kurkin A. A., Naumov A. A.</i> Transport of Particles at the Propagation of Breathers of Internal Gravity Waves	53
<i>Talipova T. G., Kurkina O. E., Naumov A. A., Kurkin A. A.</i> Modelling of the Evolution of the Internal Boron in the Pechora Sea	62
<i>Kagan B. A., Timofeev A. A.</i> Modeling of the Stationary Circulation and Semidiurnal Surface and Internal Tides in the Strait of Kara Gates	72
<i>Morozov E. G.</i> Internal Tides and Currents in the Gibraltar and Bab-el-Mandeb Straits	80

УДК 551.466

© А. А. Куркин¹, С. В. Семин¹, Ю. А. Степаныц^{1,2}

¹Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева, Россия

²Университет Южного Квинсленда, Тувумба, Австралия

Yury.Stepanyants@usq.edu.au

Трансформация поверхностных и внутренних волн над донным уступом. Обзор

Представлен краткий обзор работ по трансформации поверхностных и внутренних гравитационных волн над донным уступом. Обсуждается обобщение известных формул Лэмба для расчета коэффициентов трансформации, полученных в длинноволновом приближении, на случай волн произвольной длины в жидкости конечной глубины. Дано описание строгого подхода к расчету коэффициентов трансформации в линейном приближении как для поверхностных, так и для внутренних волн в двухслойной жидкости и отмечены трудности, связанные с использованием этого подхода. Рассмотрены различные приближенные подходы и их соответствие строгой теории, а также экспериментальным и численным данным. В рамках строгого подхода приведены расчеты не только коэффициентов трансформации бегущих волн, но также и коэффициентов возбуждения прижатых к уступу волн. Найдено, что длина несущей волны узкополосного пакета после прохождения над уступом изменяется пропорционально фазовой скорости, а длина огибающей изменяется пропорционально групповой скорости. Представлено сравнение теоретических результатов с численными данными и лабораторными экспериментами.

Ключевые слова: волны на воде, внутренние волны, трансформация волн, коэффициент прохождения, коэффициент отражения, волновой пакет, трансформация волн на шельфе.

A. A. Kurkin¹, S. V. Semin¹, Y. A. Stepanyants^{1,2}

¹Nizhny Novgorod State Technical University, Russia

²University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia

Yury.Stepanyants@usq.edu.au

Transformation of Surface and Internal Waves Over the Bottom Step. Review

A brief overview of works on transformation of surface and internal gravity waves over a bottom step is presented. The generalization of Lamb formulae for the transformation coefficients derived in the long-wave approximation is discussed for waves of arbitrary length in the fluid of a finite length. The rigorous approach to calculation of transformation coefficients in the linear approximation is described both for the surface and internal waves in two-layer fluid. The problems associated with the application of the rigorous approach are noticed. The various approximate approaches are considered, as well as their compliance with the rigorous theory and numerical and experimental results. Within the framework of the rigorous approach the transformation coefficients of travelling waves and the excitation coefficients of evanescent modes are calculated. It is shown that wavelength of a quasi-monochromatic wavetrain changes after transformation on a bottom step proportionally to the phase speed, whereas the length of the envelope changes proportionally to the group speed. Comparison of theoretical results with numerical data and laboratory experiments is presented.

Key words: water waves, internal waves, wave transformation, transmission coefficient, reflection coefficient, wave packet, waves transformation on the shelf.

Проблема трансформации поверхностных волн над донным уступом возникла достаточно давно [1]; интерес к ней обусловлен как с теоретической, так и с практической точек зрения. Известно, что при распространении волн из открытого океана к берегу им обычно приходится преодолевать зону шельфа, в которой происходит относительно резкое изменение глубины океана. Подобного же рода резкий подъем дна часто наблюдается и в менее глубоких прибрежных зонах морей и океанов, а также в озерах, реках и водохранилищах. При прохождении волны над донным уступом происходит ее трансформация с образованием прошедшей и отраженной волн. При этом амплитуда прошедшей волны может до двух раз превышать амплитуду падающей. Аналогичные явления, связанные с трансформацией внутренних волн, также привлекают к себе внимание исследователей в последние годы [2]. Большой вклад в изучение трансформации как поверхностных, так и внутренних уединенных волн был внесен Е. Н. Пелиновским, который одим из первых рассчитал трансформацию солитонов Кортевега—де Вриза (КдВ) на подводном уступе [3].

Для оценки возможного воздействия прошедшей волны на морские инженерные сооружения, платформы, нефте- и газопроводы, а также на пляжи, порты, берегозащитные сооружения и суда необходимо знать как можно точнее параметры прошедших волн. Данная проблема, как отмечено выше, представляет также определенный академический интерес, поскольку, несмотря на относительную простоту постановки задачи, ее решение до последнего времени не было представлено в полном объеме, хотя к данному времени уже накопилось довольно много теоретических, экспериментальных и численных работ, посвященных расчету коэффициентов трансформации поверхностных и внутренних волн в рамках тех или иных приближений.

На рис. 1 схематично представлен процесс трансформации волн на подводном уступе. Пусть квазимонохроматический волновой пакет с заданной частотой ω , волновым числом k_i и амплитудой A_i распространяется из области 1 с глубиной h_1 в область 2 с глубиной h_2 . В результате его трансформации на подводном уступе при $x = 0$ возникают прошедший волновой пакет с волновым числом k_t и амплитудой A_t и отраженный пакет с волновым числом k_r таким же, как и в падающем

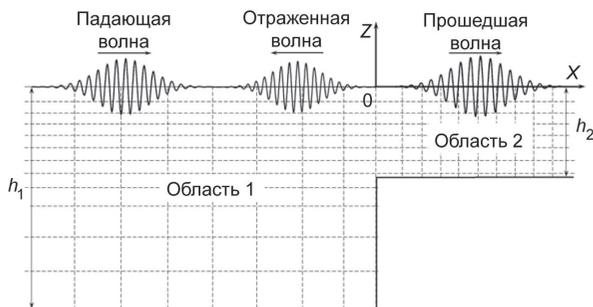


Рис. 1. Схема расчетной области.

пакете, и амплитудой A_r . При этом частота волны остается неизменной. Характерные длины волновых пакетов $D_{i,t}$ предполагаются значительно превосходящими длины несущих волн $\lambda_{i,t} = 2\pi/k_{i,t}$ так, что пространственные спектры волновых пакетов являются достаточно узкими.

Ниже дадим описание задачи об определении параметров трансформированных волн в зависимости от амплитуды и длины волны набегающего пакета, а также от величины перепада глубин в рамках линейной теории.

Далее мы опишем используемые подходы к задаче определения параметров трансформированных волн в зависимости от амплитуды, волнового числа и длины набегающего волнового пакета, а также от величины перепада глубин. Представлены результаты, полученные в рамках как линейной теории, так и нелинейной.

Трансформация поверхностных волн на донном уступе

Линейные теории. Первые теоретические результаты по трансформации поверхностных волн над донным уступом, по-видимому, были опубликованы Лэмбом в его известной монографии [1]. Из простых физических соображений им были выведены в длинноволновом приближении коэффициенты трансформации для волн бесконечно малой амплитуды в канале прямоугольного сечения с резким изменением глубины и ширины. Используя условия непрерывности давления, а также равенства потоков жидкости слева и справа от уступа, он получил выражения для коэффициентов трансформации, которые теперь известны как формулы Лэмба:

$$T \equiv \frac{A_t}{A_i} = \frac{2c_1}{c_1 + c_2}, \quad R \equiv \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad (1)$$

где A_i — амплитуда смещения свободной поверхности в набегающей волне, а A_t и A_r — амплитуды прошедшей и отраженной волн соответственно, c_1 и c_2 — скорости распространения длинных волн перед уступом и за ним (здесь формулы Лэмба приведены для канала постоянной ширины).

Подставляя в (1) известные выражения для скорости распространения длинных волн в линейном приближении [1, 4, 5] $c = \sqrt{gh}$, можно получить коэффициенты трансформации, зависящие только от соотношения глубин до и после уступа:

$$T = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}, \quad R = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}}. \quad (2)$$

Вывод формул (2), приведенный Лэмбом, впоследствии подвергался критике в виду того, что при их выводе пренебрегалось вертикальной компонентой скорости в волне, что не справедливо в области донного уступа. Строгая постановка задачи о трансформации поверхностных волн произвольной длины на уступе в линейном приближении была впервые предложена в работе Бартоломеуша [6], в которой автор учел граничные условия с обращением в ноль нормальной компоненты скорости на всех твердых поверхностях. При такой постановке задачи в районе уступа волновое поле состоит как из распространяющихся волн (падающей, прошедшей и отраженной), так и из бесконечного числа не распространяющихся прижатых к уступу мод, экспоненциально спадающих в обе стороны с увеличением расстояния от него. Сшивая решения по обе стороны от уступа, Бартоломеуш свел задачу расчета коэффициентов трансформации к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Однако решение выведенного уравнения ему удалось получить только в пределе бесконечно длинных волн, что привело к тем же формулам Лэмба (2), подтвердив их справедливость в этом пределе. В общем же случае для волн произвольной длины коэффициенты трансформации в его работе получены не были. Позднее аналогичные результаты были получены в работе Жермена 1984 г. [7].

Попытка расчета коэффициентов трансформации для волн конечной длины была предпринята ранее в работе Крылова 1949 г. [8] (см. ее изложение в монографии Сретенского [4]) для случая, когда длина набегающей волны много меньше глубины области ($k_i h_1 \gg 1$), так что эту область можно считать бесконечно глубокой. Используя теорию аналитических функций комплексного переменного и метод конформного преобразования, Крылов вывел следующие асимптотические формулы для коэффициентов трансформации:

— для набегающих волн коротких по сравнению с глубиной над уступом ($k_i h_2 \gg 1$):

$$T \approx 1 - \frac{1}{2} \exp(-4k_i h_2), \quad R \approx \exp(-2k_i h_2); \quad (3)$$

— для набегающих волн длинных по сравнению с глубиной над уступом ($k_i h_2 \ll 1$):

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\ln(2/k_i h_2)}{\delta} \right]^2}}, \quad R \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\delta}{\ln(2/k_i h_2)} \right]^2}}. \quad (4)$$

Зависимости коэффициентов трансформации от безразмерного волнового числа $k_i h_2$ набегающей волны, построенные по этим формулам, показаны на рис. 2.

Кривые 1—4, построенные по асимптотическим формулам (3) и (4), становятся не справедливы в окрестности $k_i h_2 = 1$. При этом в области $k_i h_2 > 1$ кривые 1 и 2 очень быстро приближаются к своим предельным значениям 1 и 0 соответственно. По существу, эти формулы означают, что при трансформации коротких волн над подводным уступом происходит лишь незначительное их отражение, в основном же волна практически полностью проходит в область за уступом. В случае же длинных волн наблюдается обратная картина, т. е. происходит практически полное отражение волн от уступа и лишь малая их часть проходит в область за уступом. В количественном отношении, однако, коэффициент прохождения для длинных волн спадает с уменьшением волнового числа довольно медленно (см. кривую 3 на рис. 2). Так, даже для значений $k_i h \sim 10^{-4}$ коэффициент прохождения $T \approx 0.3$.

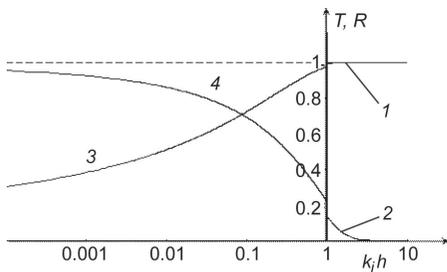


Рис. 2. Графики зависимостей коэффициентов трансформации согласно формулам (3) и (4).

1 — коэффициент прохождения T при $k_i h_2 \gg 1$; 2 — коэффициент отражения R при $k_i h_2 \gg 1$; 3 — коэффициент прохождения T при $k_i h_2 \ll 1$; 4 — коэффициент отражения R при $k_i h_2 \ll 1$.

Существенный прогресс в расчет коэффициентов трансформации поверхностных волн был внесен Такано [9, 10], который представил волновое поле в области уступа в виде суперпозиции бегущих и прижатых мод и, пользуясь ортогональностью этих мод, свел задачу о нахождении коэффициентов трансформации к решению системы из бесконечного числа алгебраических уравнений относительно коэффициентов прохождения и отражения распространяющихся волн, а также коэффициентов возбуждения прижатых мод. Благодаря тому, что абсолютное значение коэффициентов возбуждения прижатых мод убывает с ростом их номера, бесконечную систему уравнений можно ограничить конечным числом мод и получить приближенное решение, точность которого зависит от числа учтенных мод. Подобный подход был использован в дальнейшем различными авторами [11—14, 37]. В этих работах число учитываемых мод достигало 80, однако точность расчетов коэффициентов трансформации не контролировалась, сходимость решений не рассматривалась, а коэффициенты возбуждения прижатых мод не вычислялись. Эти пробелы были отчасти восполнены в работе [15], в которой число мод при расчетах доходило до 500. Кроме того, было показано, что число мод, необходимых для достижения определенной точности, зависит от перепада глубин h_2/h_1 . Там же были рассчитаны коэффициенты возбуждения прижатых мод и показано их влияние на сшивку волновых полей в области перепада глубин (см. ниже).

Задачу о трансформации поверхностных волн над донным уступом рассматривал также Ньюэн в 1960-х гг. В работе [16] он получил общие условия симметрии для коэффициентов трансформации волн:

$$|R_r| = |R_l| \equiv R, \quad |T_r T_l| = 1 - R^2, \quad (5)$$

где R_r, T_l — коэффициенты трансформации при набегании волны слева на уступ, как показано на рис. 1 (так что $h_2/h_1 < 1$), а R_r, T_r — коэффициенты трансформации при распространении волны в обратном направлении (так что $h_2/h_1 > 1$). Отметим, что первое из соотношений (1.5) для коэффициентов отражения было выведено еще Крейселем в 1949 г. [17]. Коэффициенты трансформации, вообще говоря, являются комплексными величинами, что отражает тот факт, что при трансформации волны меняются не только амплитуды прошедшей и отраженной волн, но и их фазы. Для фаз волн Ньюэном также были выведены соотношения симметрии:

$$\arg T_r = \arg T_l \equiv \delta T, \quad \arg R_r + \arg R_l \equiv \pi + 2\delta T. \quad (6)$$

Затем в работе [11] Ньюэн с помощью подхода, развитого в работах Бартоломеуша [6] и Такано [9, 10], по существу, впервые рассчитал коэффициенты трансформации волн для специального случая, когда область конечной глубины h_2 соседствует с областью бесконечной глубины $h_1 = \infty$. Им были получены зависимости коэффициентов трансформации волн от частоты с помощью численного решения системы из 80 уравнений, включающей как бегущие, так и прижатые к уступу моды. При этом рассматривались два случая, когда волна набегаёт из бесконечно глубокой области на уступ и когда волна распространяется из области конечной глубины в бесконечно глубокую область. Полученные результаты были в полном согласии с соотношениями симметрии (5) и (6) (рис. 3, б).

Особенностью задачи, рассмотренной Ньюэном, является то, что в случае бесконечно глубокой жидкости спектр прижатых мод становится непрерывным. В результате этого бесконечная сумма по всем прижатым модам заменяется интегралом в области над глубокой жидкостью.

Подобную же задачу рассматривал позже Майлс [19], который отметил, что для расчета коэффициента прохождения волн с ошибкой, не превышающей 5 %, достаточно ограничиться учетом только бегущих мод, полностью игнорируя вклад нераспространяющихся мод (при этом ошибка в определении коэффициента отражения может достигать 90 %). Этот вывод был подтвержден

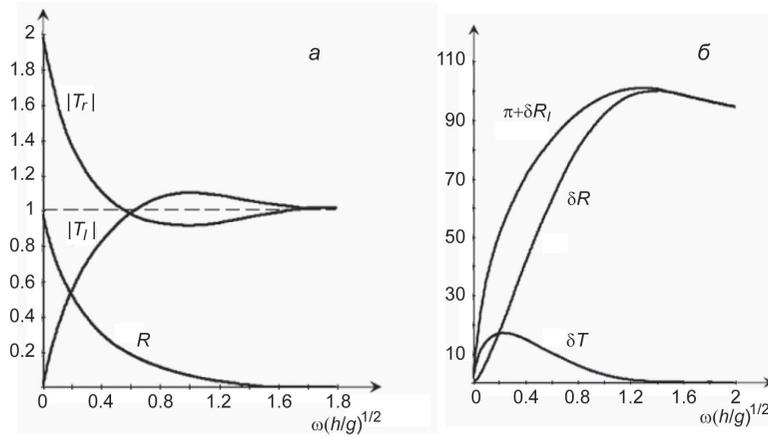


Рис. 3. Коэффициенты трансформации поверхностных волн согласно [9].

a — зависимости коэффициентов прохождения $|T_r|$ и отражения R от нормированной частоты набегающей волны; *б* — зависимости фаз трансформированных волн от нормированной частоты набегающей волны.

затем в работе [15], в которой были выведены явные формулы для коэффициентов трансформации в соответствие с идеей Майлса, но для жидкости конечной глубины по обе стороны от уступа. Эти формулы имеют вид:

$$T = \frac{chk_i h_2}{chk_i h_1} \frac{8k_i k_t (k_i^2 - k_t^2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1) \text{sh} k_i (h_1 - h_2)}{(2k_i h_2 + \text{sh} 2k_i h_2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1)(k_i^2 - k_t^2)^2 + 16k_i^2 k_t^2 \text{sh}^2 k_i (h_1 - h_2)}, \quad (7)$$

$$R = \frac{1 - K}{1 + K}, \text{ где } K = \frac{\text{sh}^2 k_i (h_2 - h_1)}{(2k_i h_2 + \text{sh} 2k_i h_2)(2k_i h_1 + \text{sh} 2k_i h_1)} \frac{16k_i^2 k_t^2}{(k_i^2 - k_t^2)^2}. \quad (8)$$

В длинноволновом приближении ($k_i, k_t \rightarrow 0$) формулы (7), (8) переходят в известные формулы Лэмба (2).

В работе Нуднера [37] методом Такано (по-видимому, развитым независимо) была рассмотрена задача о прохождении волны над уступом. Коэффициенты трансформации при этом не вычислялись, но были определены возвышения свободной поверхности и давление в любой точке жидкости.

Подход Такано [9, 10] был также использован Масселем [12, 13], который рассмотрел трансформацию волн на подводном препятствии *конечной* протяженности и как частный случай на бесконечно протяженном препятствии, т. е. на подводном уступе. Если длина препятствия конечна, то возникают резонансные эффекты от переотражения волн от его краев. В результате такой интерференции коэффициент отражения как функция длины волны многократно обращается в ноль, что приводит к безотражательному прохождению волн над подводным барьером. Типичный график

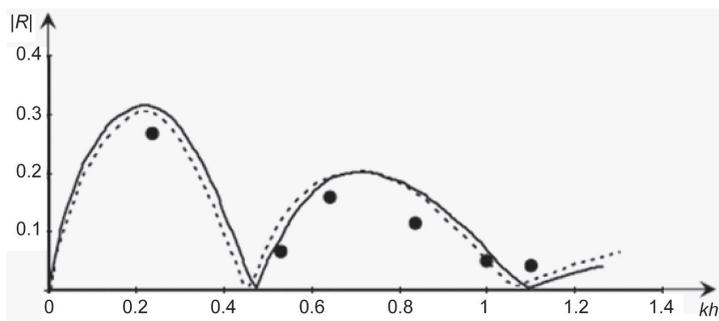


Рис. 4. Типичный график зависимости коэффициента отражения поверхностной волны от подводной ступеньки конечной длины согласно [12].

Здесь $h = 0.3$ м — глубина водоема, $h_i = 0.15$ м — глубина жидкости над препятствием длины 0.6 м. Сплошная линия отражает теоретические результаты Масселя, пунктирна кривая — результаты Мэя и Блэка [18], полученные с помощью вариационного подхода, а точками показаны экспериментальные данные работы [12].

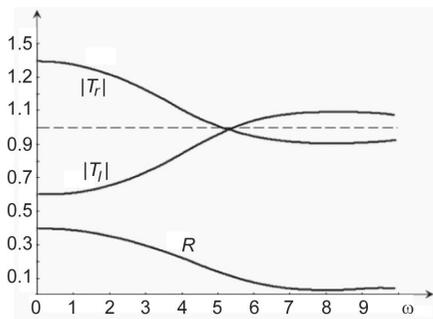


Рис. 5. Зависимости коэффициентов трансформации поверхностных волн от частоты для заданного перепада глубин $h_2/h_1 = 3/16$ согласно [12, 13].

зависимости коэффициента отражения от волнового числа набегающей волны показан на рис. 4.

Рассматривая задачу о трансформации волн на подводном уступе, Массель с помощью численного решения усеченной системы уравнений для коэффициентов возбуждения прижатых мод получил зависимости коэффициентов трансформации от частоты для нескольких фиксированных значений перепада глубин перед уступом и за ним. При этом рассматривалось движение набегающей волны в обоих направлениях слева направо и справа налево. Зависимости коэффициентов трансформации от частоты волны для случая $h_2/h_1 = 3/16$ ($h_1 = 0.8$ м, $h_2 = 0.15$ м) показаны на рис. 5. Как легко видеть, коэффициенты трансформации удовлетворяют условию симметрии (5).

Применение строгого подхода к решению задачи о трансформации линейных поверхностных волн на донном уступе показало, что выражения для коэффициентов трансформации могут быть получены теоретически с любой точностью путем численного решения системы из большого числа линейных алгебраических уравнений. Практическое же применение данного подхода приводит к довольно громоздким вычислениям; при этом иногда возникают ситуации, когда матрица коэффициентов алгебраической системы плохо обусловлена. В этой связи представляется полезным поиск достаточно простых, хотя и приближенных методов расчета коэффициентов трансформации, позволяющих относительно быстро получать и анализировать требуемый результат с контролируемой точностью. Особый интерес представляют случаи, когда коэффициенты трансформации удастся представить аналитическими формулами.

Иной подход к приближенному расчету трансформации поверхностных волн над донным уступом был предложен в работе Маршала и Нагди 1990 г. [20]. Он основан на приближенной теории поверхностных волн Грина—Нагди, которая заключается в представлении поля скорости в виде конечной суммы произведений вертикального и горизонтального профилей течений [21—24]. Как показано в этих работах, процесс расчета динамики поверхностных волн можно значительно упростить, если использовать указанное представление поля скорости. Воспользовавшись ранее разработанной приближенной теорией [21—24], Маршал и Нагди в работе [20] рассмотрели распространение монохроматической волны произвольной длины в бассейне с конечным числом донных препятствий в виде ступенек и вывели следующие формулы для коэффициентов трансформации на одной ступеньке:

$$T = \frac{2k_t}{k_t + k_i}, \quad |R| = \frac{|k_t - k_i|}{k_t + k_i}, \quad (9)$$

где k_t и k_i — волновые числа набегающей и прошедшей волн. При этом k_t определяется из следующего трансцендентного уравнения, выражающего равенство частот волн:

$$k_t \tanh(k_t h_2) = k_i \tanh(k_i h_1). \quad (10)$$

Легко видеть, что в длинноволновом приближении из (10) следует, что отношение квадратов волновых чисел падающей и прошедшей волн равно отношению глубин за уступом и перед ним $(k_t/k_i)^2 = h_2/h_1$; тогда зависимости (9) переходят в формулы Лэмба (2). Однако в своей работе Маршал и Нагди не приводят сравнение полученных ими теоретических результатов с данными каких-либо лабораторных экспериментов или численных расчетов. Далее мы покажем, что точность расчетов по формулам (9) не высока; результаты лишь отчасти согласуются с выводами строгой теории и данными прямых численных расчетов.

В работе [25] были предложены приближенные формулы для расчета коэффициентов трансформации, основанные на формальном использовании формул Лэмба в виде (1), в которых вместо «длинноволновых» скоростей $c_{1,2} = \sqrt{gh_{1,2}}$ использовались фазовые или групповые скорости волн, определяемые из дисперсионного соотношения. Очевидно, что в пределе длинных волн,

когда дисперсия отсутствует, при этом получаются формулы Лэмба. Последующее сравнение с выводами строгой теории и данными прямого численного моделирования показало, что наилучшее согласие для коэффициента прохождения обеспечивается при подстановке групповых скоростей в формулу (1); ошибка при этом не превышает 5.5 % для любых длин волн и перепадов глубин h_2/h_1 . Для коэффициента отражения наилучшее согласие обеспечивается при подстановке фазовых скоростей в формулу (1); однако ошибка расчетов при этом значительно выше, она может достигать 45 %.

Соответствующие формулы для коэффициентов трансформации имеют вид:

$$T_g \equiv \frac{2c_{g1}}{c_{g1} + c_{g2}} = \frac{q \operatorname{th}(qh_2/h_1)}{\kappa} \frac{2}{1 + Q\kappa/q}, \quad |R_p| \equiv \frac{c_{p1} - c_{p2}}{c_{p1} + c_{p2}} = \frac{|q - \kappa|}{q + \kappa}, \quad (11)$$

где $Q = \left[1 + \frac{qh_2 \operatorname{sch}^2(qh_2/h_1)}{h_1 \operatorname{th}(qh_2/h_1)} \right] \left(1 + \kappa \frac{\operatorname{sch}^2 \kappa}{\operatorname{th} \kappa} \right)^{-1}$; $\kappa = k_i h_1$ — безразмерное волновое число падающей волны; $q = k_i h_1$ — безразмерное волновое число прошедшей волны. Эти числа связаны трансцендентным уравнением (10), которое в безразмерной форме принимает вид: $q \operatorname{th}(qh_2/h_1) = \kappa \operatorname{th}(\kappa)$.

Отметим, что формулы Маршала и Нагди (9), по существу, сводятся к тому, что в формулах Лэмба (1) как для коэффициента прохождения, так и для коэффициента отражения производятся замены длинноволновых скоростей фазовыми скоростями волн. В результате коэффициент отражения, как было отмечено выше, оценивается с максимальной ошибкой в 45 % при $|R| > 0.01$, а ошибка в определении коэффициента прохождения может превышать 100 %, что значительно хуже погрешности формул предложенных в [25].

Нелинейные теории. Естественным продолжением исследований трансформации поверхностных волн на донном уступе является учет эффектов нелинейности, связанных с конечностью амплитуд волн. Нелинейные эффекты особенно важны в прошедшей волне, если глубина водоема над уступом уменьшается, например, при набегании волны из открытого океана в зону шельфа. В частности, как показано в монографии Пелиновского [26], при распространении волн цунами в открытом океане эффекты нелинейности являются слабыми, они не успевают накапливаться в планетарном масштабе, однако при выходе волны на шельф, где глубина океана падает в десятки раз, нелинейность становится весьма существенной. Это приводит к увеличению амплитуды прошедшей волны, укручению ее фронта и в некоторых случаях к обрушению волны за уступом. В этой связи большой интерес представляет задача о нелинейной трансформации поверхностных волн на донном уступе с изучением последующей эволюции прошедшей и отраженной волн.

В работе Мирчиной и Пелиновского [27] рассматривалась трансформация нелинейных волн на донном уступе в длинноволновом приближении, когда эффекты дисперсии не существенны. Применяя приближенный подход Лэмба, состоящий в использовании граничных условий сохранения потока жидкости и непрерывности давления над подводным уступом, авторы вывели систему нелинейных уравнения для определения зависимостей амплитуд прошедших и отраженных волн в зависимости от перепада глубин и амплитуды набегающей волны. Полученная система уравнений для амплитуд трансформированных волн в общем виде слишком сложна для анализа, однако в отдельных частных случаях из нее можно получить обозримые результаты. В пределе бесконечно малых амплитуд волн из полученной системы вытекают формулы Лэмба (2). В следующем порядке по амплитуде набегающей волны коэффициенты трансформации принимают вид:

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{A_i}{h_1} T_0^2 \frac{1 + \sqrt{X}}{8\sqrt{X}} \left[3(1 - X) + \frac{(3 - X)\sqrt{X} R_0^2 - 2 R_0}{1 - \sqrt{X}} \frac{R_0}{T_0} \right] \right\},$$

$$R = R_0 \left[1 + \frac{A_i}{h_1} \frac{T_0}{2(\sqrt{X} - 1)} \left(\frac{3 - X}{2} R_0^2 - \frac{1}{\sqrt{X}} \right) \right], \quad (12)$$

где A_i амплитуда набегающей волны, а $X = h_1/h_2$.

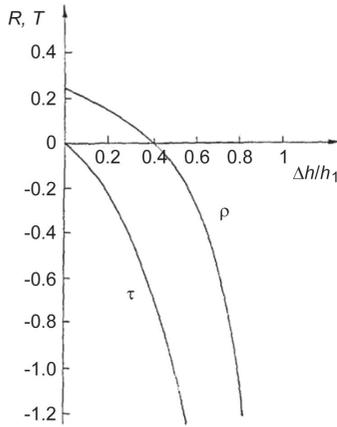


Рис. 6. Зависимости нормированных поправок к формулам Лэмба $\tau \equiv (\Delta T/T_0)/(A_i/h_1)$ и $\rho \equiv (\Delta R/R_0)/(A_i/h_1)$ от относительной высоты уступа $\Delta h/h_1$ согласно [27, 26].

На рис. 6 показаны относительные поправки к формулам Лэмба $\Delta T/T_0 \equiv (T - T_0)/T_0$ и $\Delta R/R_0 \equiv (R - R_0)/T_0$, нормированные на A_i/h_1 , как функции относительной высоты уступа $\Delta h/h_1 \equiv (h_1 - h_2)/h_1 = 1 - 1/X$. Как видно из этих графиков, нелинейность приводит к возрастанию коэффициента отражения волны при $\Delta h/h_1 < 0.4$; при больших значениях $\Delta h/h_1$ поправка к коэффициенту отражения становится отрицательной. Поправка же к коэффициенту прохождения отрицательна при любых значениях $\Delta h/h_1$. При $\Delta h/h_1 \rightarrow 0$, т. е., когда уступ отсутствует, поправка к коэффициенту отражения ΔR исчезает; исчезает, естественно, и сам коэффициент отражения R_0 , но их отношение формально остается конечным $\Delta R/R_0 \approx 0.22$. В другом предельном случае, когда $\Delta h/h_1 \rightarrow 1$, т. е., когда $h_2 \rightarrow 0$, обе поправки, будучи отрицательными, неограниченно возрастают по модулю. Другие подробности трансформации нелинейных волн в длинноволновом приближении можно найти в оригинальной работе авторов [27], а также в монографии [26].

Отметим один существенный момент, связанный с трансформацией нелинейных волн: полученные коэффициенты трансформации имеют смысл лишь в непосредственной близости от края уступа. Поскольку нелинейные волны не являются стационарными, то при удалении от края уступа прошедшая и отраженная волны эволюционируют, укручаются и либо опрокидываются, либо преобразуются в солитоны.

В работе Пелиновского [3], а также в последовавшей работе [28] изучалась трансформация солитона на донном уступе в рамках уравнения Кортевега—де Вриза (КдВ). При этом было показано, что при умеренных амплитудах падающей и прошедшей волн трансформацию на крае уступа можно рассчитывать приближенно по формулам Лэмба (2). При этом все три импульса, падающий, прошедший и отраженный, вблизи края уступа при $x = 0$ имеют одинаковую форму и длительность, изменяется лишь амплитуда импульсов:

$$\eta_i(x, t) = \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}, \quad (13)$$

$$\eta_l(x, t) = \frac{2}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}, \quad \eta_r(x, t) = \frac{1 - \sqrt{h_2/h_1}}{1 + \sqrt{h_2/h_1}} \eta_0 \operatorname{sch}^2 \frac{t\sqrt{3g\eta_0}}{2h_1}.$$

Здесь η_0 — амплитуда набегающего на уступ солитона.

С учетом формул, выведенных в работе [27], коэффициенты трансформации можно уточнить, учитывая конечность амплитуды набегающего солитона. Сохранение формы импульсов и их длительностей при трансформации солитонов на резком скачке глубины у края уступа нашло подтверждение в последующих численных расчетах [29] и лабораторных экспериментах [30, 31]. После трансформации в прошедшем и отраженном импульсах нарушается баланс между амплитудой и длительностью, характерный для стационарного солитона. В результате этого трансформированные импульсы в процессе распространения эволюционируют, порождая вторичные солитоны, число и параметры которых можно рассчитать с помощью метода обратной задачи рассеяния (см., например, [32]). При этом в отраженной волне возникает только один солитон, если $h_2/h_1 < 1$; если же $h_2/h_1 > 1$, то отраженный импульс имеет отрицательную полярность, эволюционирующий только в нестационарный волновой пакет без солитонов.

Численные исследования трансформации волн на донном уступе. Трансформация уединенных волн подробно исследовалась в работе Пелиновского с соавторами [29]. Как и в более ранних работах [3, 28], авторы использовали линейную теорию для расчета амплитуд трансформированных над уступом волн, используя формулы Лэмба (2). Для подтверждения выводов теории были выполнены расчеты динамики одиночной волны (солитона) в рамках различных численных схем:

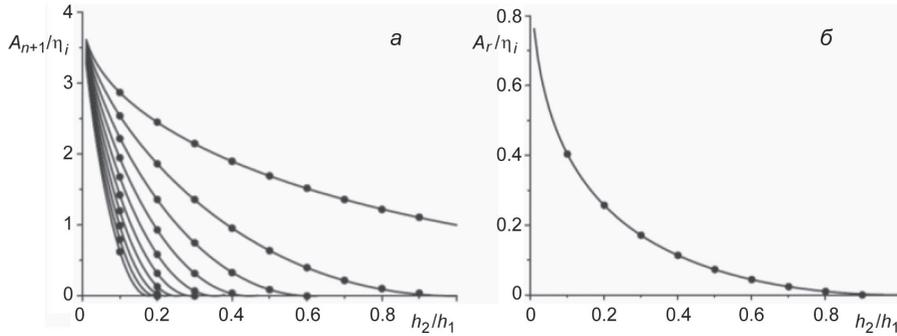


Рис. 7. Зависимости амплитуд вторичных солитонов A_{n+1} в прошедшей волне (а) и в отраженной волне (б), нормированных на амплитуду набегающего солитона η_i , от перепада глубин h_2/h_1 согласно [29]. Сплошные линии — теоретические зависимости, точки — численные данные, полученные в рамках уравнения КдВ.

на основе уравнения КдВ, обобщенного уравнения Буссинеска, а также в рамках полнонелинейной модели Навье—Стокса. Расчеты, выполненные в рамках всех этих схем, показали близкие к теоретическим результаты, как по числу вторичных солитонов, так и в отношении их амплитуд (при этом совпадения по фазам были гораздо хуже из-за неточности в определении скоростей солитонов в рамках приближенных моделей). На рис. 7 из работы [29] показано сравнение теоретических зависимостей с численными данными для амплитуд вторичных солитонов, возникающих в прошедшей волне, от перепада глубин.

Отметим, что максимальное значение амплитуды самого высокого из вторичных солитонов не может превышать амплитуду набегающего солитона более, чем в четыре раза. При этом, как следует из формул Лэмба (2), максимальное усиление амплитуды прошедшей волны по отношению к падающей не может быть больше двух вблизи края уступа. Затем, по мере эволюции трансформированного импульса, из него образуются вторичные солитоны, при этом, согласно теории уравнения КдВ [3, 28], максимальная амплитуда вторичного солитона может превысить амплитуду трансформированного на уступе импульса не более, чем в два раза.

Рис. 7 демонстрирует хорошее согласие теоретических расчетов с численными данными в рамках модели КдВ. Это подтверждает справедливость использования формул Лэмба (2), выведенных в рамках линейной теории длинных волн, для расчета трансформации импульсных возмущений малой, но конечной амплитуды, таких как, например, солитоны КдВ.

Прямое численное моделирование трансформации линейных волн произвольной длины на донном уступе было выполнено лишь совсем недавно в работах [15, 25]. При этом вдали от уступа задавался квазимонохроматический волновой пакет с центральным волновым числом k_i ; во избежание эффектов дисперсии при распространении такого пакета его характерная ширина D выбиралась достаточно большой по сравнению с длиной несущей волны $\lambda_i = 2\pi/k_i \ll D$. Численные расчеты выполнялись с помощью программного комплекса MITgcm, адаптированного для моделирования трансформации поверхностных волн над донным уступом в однородной идеальной жидкости [33—35]. Вид двумерной расчетной области представлен на рис. 1; на всех вертикальных сторонах и на дне использовалось условие непротекания (обращение в ноль нормальной компоненты скорости), а на свободной поверхности — стандартные граничные условия, кинематическое и динамическое [1, 4, 5]. Начальное возмущение задавалось в виде волнового пакета с гауссовой огибающей в области с глубиной h_1 :

$$\eta(x, 0) = A_i \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{D} \right)^2 \right] \cos k_i x, \quad (14)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{g}{\omega(k_i)} A_i \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{D} \right)^2 \right] \frac{\text{ch} [k_i (h_1 - y)]}{\text{ch} k_i h_1} \sin k_i x. \quad (15)$$

Здесь $\eta(x, t)$ — возмущение свободной поверхности, $\varphi(x, y, t)$ — гидродинамический потенциал скорости, A_i — амплитуда волнового пакета, g — ускорение свободного падения, $\omega(k_i)$ — частота

несущей волны, связанная с волновым числом дисперсионным соотношением: $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kh}$.

Амплитуда начального возмущения выбиралась столь малой, чтобы нелинейные эффекты не проявлялись в расчетной области $A_i = \min\{h_2, h_1\}/500$. Численные расчеты производились для перепадов глубин $0.01 \leq h_2/h_1 \leq 100$, что соответствует как набеганию волн из глубокой области в более мелкую область, так и в обратном направлении. При этом глубина h_1 во всех расчетах задавалась одной и той же $h_1 = 50$ м, а глубина за уступом h_2 варьировалась. Ниже представлены результаты расчетов лишь для трех значений безразмерных волновых чисел $\kappa = \kappa_i h_1 = 0.1, 1$ и 10 , последовательно отличающихся на порядок. Амплитуды прошедшей и отраженной волн определялись на достаточном удалении от уступа так, чтобы не было интерференции с набегающей волной. После этого вычислялись коэффициенты прохождения $|T| = |A/A_i|$ и отражения $|R| = |A_r/A_i|$.

Результаты численного моделирования процесса трансформации для трех указанных волновых чисел представлены на рис. 8.

Как видно из этого рисунка, аппроксимационные формулы (11) хорошо согласуются с данными прямых численных расчетов, причем не только качественно, но и количественно, воспроизводя локальный минимум коэффициента прохождения при $\kappa = 10$ в области $h_2/h_1 < 1$, а также предельные значения T в области $h_2/h_1 > 1$.

Как и следовало ожидать, согласие коэффициентов трансформации волн с формулами Лэмба (2) наблюдается только для достаточно малых значений волновых чисел κ (см., например, ромбики на рис. 8 и кривые 1 для коэффициентов прохождения и отражения для $\kappa = 0.1$). Интересной особенностью коэффициентов трансформации является их немонотонная зависимость от перепада глубин. Вследствие немонотонного характера коэффициента прохождения при достаточно больших значениях κ , он может обращаться в единицу не только при $h_2/h_1 = 1$, когда уступа вовсе нет, но и при некотором значении $h_2/h_1 < 1$ (см. рис. 8), которое зависит от κ . При этом коэффициент отражения не обращается в ноль вторично, а длина прошедшей волны не совпадает с длиной начальной волны, $q \neq \kappa$. Соотношение между волновым числом исходной волны κ^* и перепадом глубин h_2/h_1 , при котором коэффициент прохождения обращается в единицу, может быть получено из условия $T = 1$ совместно с уравнением (10). Ввиду сложности результирующего трансцендентного уравнения оно здесь не приводится; его численное решение представлено на рис. 9.

Для малых значений $h_2/h_1 \ll 1$ зависимость κ^* от h_2/h_1 может быть аппроксимирована простой формулой $\kappa^* = 0.36h_1/h_2$, представленной пунктирной линией в двойном логарифмическом масштабе на рис. 9.

Несколько худшее согласие между аппроксимационными формулами и численными данными наблюдается для коэффициента отражения, особенно при больших значениях κ в области $h_2/h_1 < 1$. Но в целом согласие с численными данными можно признать и в этом случае вполне удовлетворительным.

Лабораторные эксперименты по трансформации волн на донном уступе. По-видимому, первой работой, содержащей сравнение экспериментальных данных по трансформации

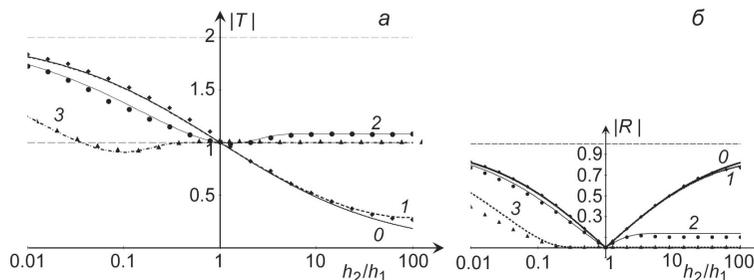


Рис. 8. Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) как функции перепада глубин.

Результаты численных расчетов представлены различными символами: ромбики — $\kappa = 0.1$; точки — $\kappa = 1$; треугольники — $\kappa = 10$; сплошные линии — расчеты по формулам Лэмба (2). Остальные кривые построены по аппроксимационным формулам (11).

поверхностных волн над подводным уступом с теорией, является работа Ньюэна [11], в которой исследовался переход квазимонохроматической волны из бесконечно глубокой области в область конечной глубины (см. раздел 2). Как видно из рис. 10, взятого из этой работы, данные лабораторного эксперимента находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами.

В последующих лабораторных экспериментах изучалась лишь трансформация длинных (по сравнению с глубиной бассейна) уединенных волн. Так, в работе [30] авторы приводят результаты большой серии экспериментов, в которых менялась высота подводного уступа и амплитуда набегающей уединенной волны. При этом амплитуды волн в ряде случаев были не малы, так что наблюдались нелинейные эффекты, приводящие даже к обрушению прошедших за уступ волн. Проведенные исследования при малых амплитудах волн продемонстрировали хорошее согласие с теоретическими формулами, полученными в [3]. В частности, в экспериментах при определенном соотношении глубин наблюдалось два и более одиночных импульсов в прошедшей волне, тогда как в отраженной волне образовывался лишь солитон. Кроме того, было отмечено, что число и амплитуды прошедших волн увеличиваются с ростом высоты уступа.

В еще одной работе на эту же тему [31] также рассматривалась трансформация уединенных волн как малой, так и большой амплитуды. При этом подробно изучалась как сама трансформация уединенных волн в непосредственной близости от уступа, так и дальнейшая эволюция прошедших за уступ волн. По наблюдениям авторов работы [31] при подходе волны к подводному уступу амплитуда уединенных волн несколько увеличивается, а в области за уступом наблюдалось понижение уровня свободной поверхности. Вдали от уступа результаты лабораторных экспериментов сравнивались с солитонным решением уравнения КдВ для прошедших импульсов.

Для солитонов малой амплитуды, набегающих на уступ, наблюдалось удовлетворительное согласие с теоретическими предсказаниями, тогда как при больших амплитудах наблюдалось отличие экспериментальных данных от теоретических, а также нестационарная динамика прошедших импульсов вплоть до их обрушения. По накопленным экспериментальным данным была построена диаграмма, определяющая различные режимы трансформации уединенных волн в зависимости от амплитуды начальной волны и от отношения глубин до и после уступа в диапазоне $1.0 < h_2/h_1 \leq 4.3$. При этом отмечено, при каких параметрах происходит распад прошедшего импульса на несколько солитонов, расщепление и обрушение прошедшей волны, почти полное прохождение и, наоборот, полное отражение.

В заключение этого раздела отметим, что процесс трансформации поверхностных волн на донном уступе изучался также экспериментально с помощью моделирования в нелинейных линиях электропередачи [36]. Как было показано в этой работе, в длинноволновом приближении основные уравнения, описывающие распространение сигналов в таких линиях, приводятся к уравнению КдВ. При этом было обнаружено хорошее согласие между экспериментальными данными по трансформации солитона на скачке параметров между двумя участками длинной линии с теоретическими выводами, аналогичными тем, что были получены для волн в мелком водоеме [3, 28].

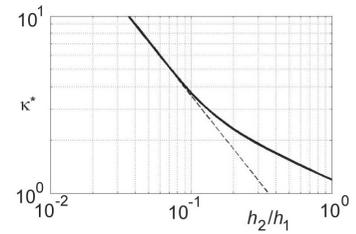


Рис. 9. Зависимость безразмерного волнового числа падающей волны от перепада глубин, когда коэффициент прохождения вторично обращается в ноль.

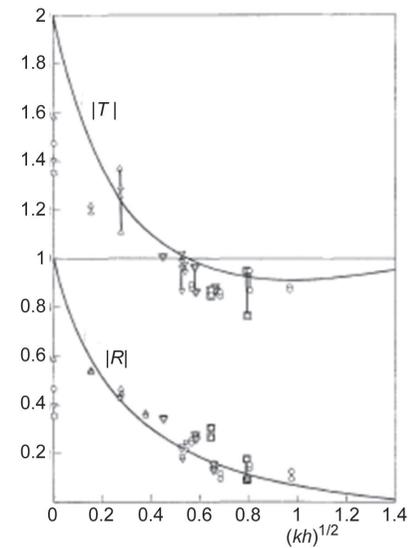


Рис. 10. Зависимость коэффициентов прохождения и отражения волн от безразмерного параметра $(kh)^{1/2}$ [11], где k — волновое число набегающей волны, а h — глубина водоема за уступом.

Различные символы соответствуют различным глубинам h , символы, на вертикальной оси указывают предельные значения коэффициентов трансформации для бесконечно длинных волн согласно формулам Лэмба (2).

Трансформация внутренних волн на донном уступе

Теоретические исследования. Работы по трансформации внутренних волн на донном уступе стали появляться только в самое последнее время. Так в статье [2] были получены обобщения формул Лэмба (2) для случая очень длинных внутренних волн на границе раздела двух слоев жидкости почти равной плотности (в приближении Буссинеска). Для произвольного соотношения плотностей подобные формулы затем были выведены в работе [38]; их можно выразить, как и в случае поверхностных волн, через скорости волн за уступом c_2 и перед ним c_1 (1). При этом в длинноволновом приближении

$$c_{1,2} = \sqrt{\frac{(1-a)gh_0h_{1,2}}{h_0 + ah_{1,2}}}, \quad (16)$$

где h_0 — глубина залегания пикноклина, а $h_{1,2}$ — толщины верхнего и нижнего слоев жидкости.

Исходя из этих формул, можно снова предложить аппроксимационные формулы для коэффициентов трансформации волн произвольной длины [38]. Как показали результаты прямых численных расчетов (об этом подробнее ниже), наилучшая аппроксимация достигается, как и в случае поверхностных волн (см. выше), если в формулах Лэмба для коэффициента прохождения использовать групповые скорости линейных волн, а для коэффициента отражения — фазовые скорости. Результирующие формулы имеют вид:

$$R_0 = \frac{1-Q_r}{1+Q_r}, \quad T_0 = \frac{2}{1+Q_t}, \quad (17)$$

$$\text{где } Q_r = \frac{k_i}{k_t}, \quad Q_t = Q_r \frac{D(k_i h_1, 1, k_t h_0, 1) \cdot D[k_t h_2, E(k_t h_0), k_t h_0, E(k_t h_2)]}{D(k_t h_2, 1, k_t h_0, 1) \cdot D[k_i h_1, E(k_i h_0), k_i h_0, E(k_i h_1)]},$$

$$D(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha \beta \theta \alpha + \delta \theta \gamma, \quad E(\alpha) = 1 + \alpha(\text{cth} \alpha - \text{th} \alpha).$$

При $a \rightarrow 0$ формулы (17) переходят в аппроксимационные формулы (10) для поверхностных волн. Графики зависимостей коэффициентов трансформации от h_2/h_1 хорошо согласуются с результатами численных расчетов. При этом максимальная погрешность коэффициента прохождения не превышает 10 %.

Строгая теория трансформации линейных внутренних волн на донном уступе в двухслойной жидкости до сих пор опубликована не была; недавно полученные результаты содержатся в кандидатской диссертации одного из авторов данной работы [39]. Описание задачи о трансформации линейных внутренних волн над донным уступом проводилось в рамках потенциальной теории в приближении твердой крышки на поверхности. Жидкость в верхнем и нижнем слоях с плотностью ρ_0 и ρ_1 соответственно предполагалась однородной, невязкой и несжимаемой. Путем сшивки решений по обе стороны от уступа с учетом полного набора прижатых к уступу нераспространяющихся мод была получена следующая система уравнений для коэффициентов отражения R_0 и прохождения T_0 внутренних волн (R_n и T_n при $n \geq 1$ представляют собой коэффициенты возбуждения нераспространяющихся мод перед уступом и за ним соответственно):

$$h_1 \geq h_2 : \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{\theta_n} J_{\theta_n \chi_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{\chi_n} K_{\chi_n \chi_m} = -\frac{J_{\theta_n \chi_m}}{\theta_0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} R_n K_{\theta_n \theta_m} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n J_{\theta_m \chi_n} = K_{\theta_0 \theta_m}; \end{cases} \quad h_1 \leq h_2 : \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{\theta_n} K_{\theta_n \theta_m} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{\chi_n} J_{\chi_n \theta_m} = -\frac{K_{\theta_0 \theta_m}}{\theta_0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} R_n J_{\chi_m \theta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n K_{\chi_n \chi_m} = J_{\chi_n \theta_0}. \end{cases} \quad (18)$$

$$J_{\theta_\chi} = \begin{cases} \rho_1 \frac{-\theta \sin \theta (h_1 - h_2)}{(\theta^2 - \chi^2) \sin \theta h_1 \sin \chi h_2}, & \theta \neq \chi, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \text{ctg} \theta h_0 \text{ctg} \chi h_0 + \frac{\text{ctg} \theta h_0}{\chi h_0} \right) + \frac{h_2 \rho_1}{2} \left(1 + \text{ctg} \theta h_1 \text{ctg} \chi h_2 + \frac{\text{ctg} \theta h_1}{\chi h_2} \right), & \theta = \chi; \end{cases}$$

$$J_{\chi_0} = \begin{cases} \rho_1 \frac{-\chi \sin \chi (h_2 - h_1)}{(\chi^2 - \theta^2) \sin \chi h_2 \sin \theta h_1}, & \chi \neq \theta, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \chi h_0 \operatorname{ctg} \theta h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \chi h_0}{\theta h_0} \right) + \frac{h_1 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \chi h_2 \operatorname{ctg} \theta h_1 + \frac{\operatorname{ctg} \chi h_2}{\theta h_1} \right), & \chi = \theta; \end{cases}$$

$$K_{\theta_n \theta_m} = \begin{cases} 0, & \theta_n \neq \theta_m, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_m h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \theta_m h_0}{\theta_m h_0} \right) + \frac{h_1 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_m h_1 + \frac{\operatorname{ctg} \theta_m h_1}{\theta_m h_1} \right), & \theta_n = \theta_m; \end{cases}$$

$$K_{\chi_n \chi_m} = \begin{cases} 0, & \chi_n \neq \chi_m, \\ \frac{h_0 \rho_0}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \chi_m h_0 + \frac{\operatorname{ctg} \chi_m h_0}{\chi_m h_0} \right) + \frac{h_2 \rho_1}{2} \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \chi_m h_2 + \frac{\operatorname{ctg} \chi_m h_2}{\chi_m h_2} \right), & \chi_n = \chi_m. \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ — порядковый номер моды из наборов решений трансцендентных уравнений при фиксированной частоте волны ω :

$$\omega^2 = \frac{-g \theta_n (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 \operatorname{ctg} \theta_n h_0 + \rho_1 \operatorname{ctg} \theta_n h_1} = \frac{-g \chi_n (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 \operatorname{ctg} \chi_n h_0 + \rho_1 \operatorname{ctg} \chi_n h_2}, \quad (19)$$

$\theta_n \in \{\theta_0 = ik_p, \theta_1 = k_{11}, \theta_2 = k_{12}, \dots\}$ и $\chi_n \in \{\chi_0 = ik_p, \chi_1 = k_{11}, \chi_2 = k_{12}, \dots\}$.

При выводе системы уравнений (18) было использовано свойство ортогональности функций вертикальной структуры потенциалов течений, возникающих вблизи уступа:

$$Y_{1,n}(z) = \begin{cases} \frac{\cos \theta_n (z - h_0)}{\sin \theta_n h_0}, & \Omega_1^0 : 0 \leq z \leq h_0, \\ -\frac{\cos \theta_n (z + h_1)}{\sin \theta_n h_1}, & \Omega_1^1 : -h_1 \leq z < 0; \end{cases} \quad Y_{2,n}(z) = \begin{cases} \frac{\cos \chi_n (z - h_0)}{\sin \chi_n h_0}, & \Omega_2^0 : 0 \leq z \leq h_0, \\ -\frac{\cos \chi_n (z + h_2)}{\sin \chi_n h_2}, & \Omega_2^1 : -h_2 \leq z < 0. \end{cases}$$

Для бесконечно длинных волн из систем уравнений (18) получаются формулы (1) с выражениями для скоростей (16) [38], которые в приближении Буссинеска сводятся к формулам, выведенным в [37]. В предельном случае очень малой плотности верхнего слоя жидкости $\rho_0 \rightarrow 0$ отсюда следуют формулы Лэмба (2) для поверхностных волн.

Из системы (18) можно получить другой вид приближенных формул для коэффициентов трансформации, если пренебречь вкладом нераспространяющихся мод. Такой подход был впервые предложен Майлсом для поверхностных волн [19] (см. формулы (7), (8)). Мы здесь не приводим эти формулы ввиду их громоздкости. Расчеты показывают, что при определении коэффициента прохождения с их помощью максимальная ошибка не превышает 9 %. Однако с практической точки зрения формулы (17) более удобны, ибо они менее громоздки и обеспечивают несколько большую точность при расчете коэффициента отражения.

Численные расчеты в рамках линейной модели. С целью проверки применимости развитой теории и используемых при этом приближений было выполнено прямое численное моделирование трансформации внутренних волн над донным уступом с использованием упомянутой выше модели MITgcm при отношении плотностей слоев жидкости $a = \rho_0/\rho_1 = 0.9961$. Графики коэффициентов трансформации, вычисленных с помощью системы (18) при полном числе мод $N = 500$ и полученных при численном моделировании представлены на рис. 11 для трех положений границы раздела жидкостей $h_0/h_1 = 0.1, 1, 10$. Как видно из рисунка, результаты численного моделирования хорошо согласуются с решениями строгой задачи.

Учет большого числа нераспространяющихся мод ($N = 500$) позволяет получать решение с высокой точностью, которое можно рассматривать как эталонное. При меньшем числе мод ошибка в расчетах коэффициентов трансформации постепенно начинает сказываться. Так при $N = 150$

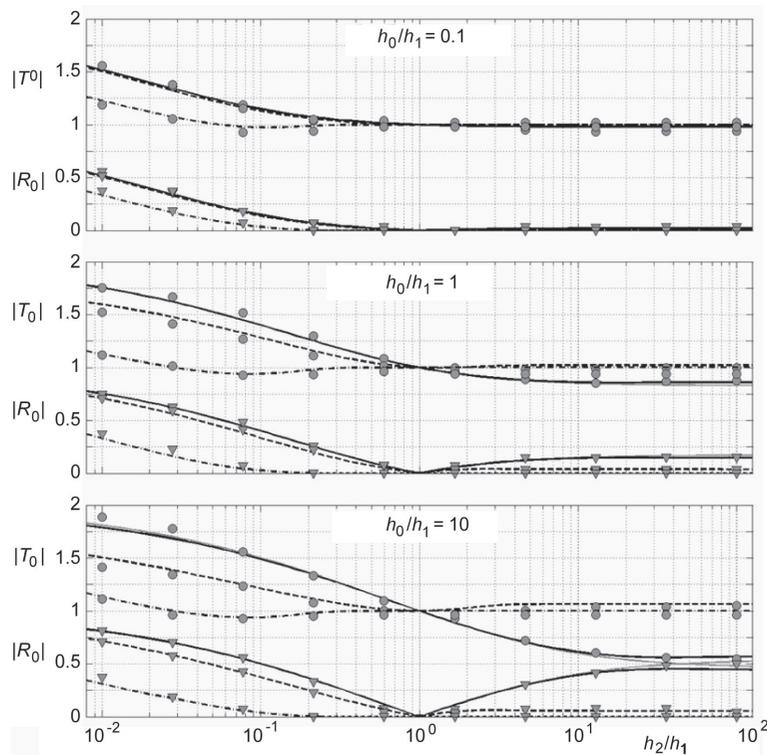


Рис. 11. Графики зависимости коэффициентов прохождения T и отражения R внутренних волн от отношения глубин h_2/h_1 , вычисленные на основе строгого подхода (сплошные линии) и в численной модели (символы \bullet для T и \blacktriangledown для R) при $a = 0.9961$. Формулы Лэмба — серая линия; $\kappa = 0.1$ — черная линия; $\kappa = 1$ — пунктир; $\kappa = 10$ — штрихпунктир.

коэффициент прохождения $|T_0|$ вычисляется уже с ошибкой в 1 %; такая же ошибка для коэффициента отражения $|R_0|$ получается при $N = 400$.

В целом коэффициенты отражения и прохождения внутренних волн имеют те же особенности, что и для поверхностных волн, однако чем ближе граница раздела слоев жидкости располагается к верхней границе, тем менее интенсивно происходит процесс трансформации. Это особенно заметно при $h_0/h_1 = 0.1$ для длинных волн и волн умеренной длины.

Анализ влияния разности плотностей слоев жидкости на коэффициенты трансформации показал, что заметные отклонения от результатов численных расчетов выполненных в приближении Буссинеска наблюдаются только при отношении плотностей $a < 0.6$, когда такое приближение уже заведомо не оправдано. Особенно сильные отклонения проявляются в случае, когда граница раздела слоев жидкостей располагается вблизи твердой крышки ($h_0/h_1 = 0.1$). В случае отношения плотностей $a = 0.0012$, характерного для границы раздела между воздухом и водой, коэффициенты трансформации практически не зависят от положения границы раздела жидкостей и хорошо согласуются с результатами численных расчетов, выполненных для поверхностных волн.

При трансформации внутренних волн также возможен эффект прохождения падающей волны над уступом без изменения ее амплитуды, при этом $|T_0| = 1$, но коэффициент отражения не равен нулю, а длина прошедшей волны не равна длине падающей волны. Этот эффект имеет место при любой глубине залегания границы раздела жидкостей (пикноклина) h_0 .

Изменение характерной ширины огибающей волнового пакета определяется так же, как и для поверхностных волн, с помощью законов сохранения энергии и потока энергии по формуле

$$T_D = \frac{D_t}{D_i} = \frac{1 - |R_0|^2}{|T_0|^2} = \frac{V_{gt}}{V_{gi}}, \quad (20)$$

где D_i и D_t — характерные ширины падающего и прошедшего волновых пакетов соответственно, а V_{gi} и V_{gt} — их групповые скорости. Результаты численных расчетов продемонстрировали хорошее согласие с этой формулой.

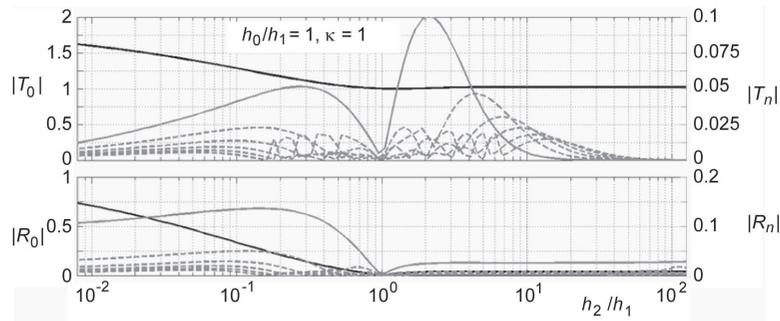


Рис. 12. Коэффициенты трансформации $|R_0|$, $|T_0|$ (черные линии, левая шкала) и возбуждения прижатых мод $|R_n|$, $|T_n|$ внутренних волн при $a = 0.9961$ (сплошные серые линии для $|R_1|$ и $|T_1|$ и пунктир для остальных коэффициентов, правая шкала).

Из решения системы уравнений (18) можно также определить коэффициенты возбуждения распространяющихся мод R_n и T_n для $n = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 12 представлены графики зависимостей R_n и T_n совместно с коэффициентами трансформации R_0 и T_0 от h_2/h_1 для случая $h_0/h_1 = 1$ и $\kappa = 1$, при котором коэффициенты возбуждения принимают максимальные значения. Для внутренних гравитационных волн амплитуды прижатых мод не превышают 15 % от амплитуды падающей волны.

Численные расчеты трансформации уединенных волн. Трансформация внутренних уединенных волн на донном уступе изучалась в работах Пелиновского с соавторами [2, 40, 41]. В статье [2] представлены теоретические расчеты амплитуд вторичных солитонов, возникающих в прошедшей и отраженной волнах вдали от уступа. При этом расчеты проводились в рамках уравнений КдВ и Гарднера (с учетом кубической нелинейности). Численные расчеты, выполненные в рамках этих же модельных уравнений показали хорошее согласие численных и теоретических результатов.

В работе [40] изучалась трансформация уединенных волн отрицательной полярности на донном уступе в двухслойной жидкости в рамках полнонелинейных уравнений. Были описаны различные режимы трансформации, отличающиеся амплитудами набегающих волн. Проведено численное моделирование на основе уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска. Показано, что процесс трансформации для волн умеренной амплитуды адекватно описывается в рамках модели Гарднера, однако при больших амплитудах следует пользоваться моделью Мияты—Чоя—Камассы (см., [42]). При столь больших амплитудах процесс трансформации сопровождается сдвиговой неустойчивостью и генерацией мелкомасштабных волн на пикноклине, что приводит к его постепенному размытию и утолщению. При большой величине уступа наблюдалось отражение набегающей волны большой амплитуды, сопровождавшееся перемешиванием слоев жидкости. В работе [41] подсчитывался также баланс энергии в волнах. Было выяснено, что потери энергии вблизи уступа вследствие вязкости возрастают с ростом нелинейности падающей волны.

Эти исследования были продолжены в работе [41], в которой изучалась трансформация уединенных волн большой амплитуды положительной и отрицательной полярностей. При этом основное внимание уделялось потерям энергии уединенной волной при взаимодействии с уступом. В частности, было обнаружено, что зависимость потерь энергии от высоты уступа является немонотонной и зависит от полярности уединенной волны. Как показано в работе, результаты численного моделирования согласуются с лабораторными экспериментами.

Как видно из представленных здесь результатов, проблема трансформации поверхностных волн над донным уступом к настоящему времени исследована достаточно хорошо в линейном приближении. Получены коэффициенты трансформации для волн произвольной длины как в рамках строгого подхода, так и с помощью различных приближенных формул. Получены оценки точности тех или иных приближенных подходов и показано хорошее согласие теоретических и численных результатов.

В рамках слабонелинейной теории теоретически решена задача о трансформации солитонов на донном уступе и показано хорошее согласие теоретических результатов с численными и лабораторными для волн малой и умеренной амплитуд.

Трансформация внутренних волн на донном уступе изучена значительно хуже. Теоретически получены результаты для линейных бесконечно длинных волн, тогда как для волн произвольной длины опубликованы лишь данные приближенной теории. Строгая теория будет опубликована в ближайшее время по материалам кандидатской диссертации С. В. Семина [39].

Вместе с тем, теория трансформации внутренних уединенных волн на донном уступе является более развитой. Получены теоретические результаты для солитонов малой и умеренной амплитуды в рамках моделей КДВ и Гарднера, а также численные результаты в рамках полнонелинейных уравнений Навье—Стокса с учетом диссипации энергии [2, 40, 41].

Можно прогнозировать дальнейшее развитие работ в данном направлении с целью учета вращения Земли, трансформации высших мод внутренних волн, сдвиговых течений и других природных факторов.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 2014/133 («организация проведения научных исследований») и Задание № 5.30.2014/К).

Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 330 с.
2. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 2008. V. 102. P. 179–194.
3. Пелиновский Е. Н. О трансформации одиночной волны на шельфе с горизонтальным дном // Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука. 1977. С. 61—63.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 254 с.
5. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
6. Bartolomeusz E. F. The reflection of long waves at a step // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1958. P. 106—118.
7. Germain J. P. Coefficients de reflexion et de transmission en eau peu profonde // *Rozprawy Hydrotechniczne.* 1984. Issue 46. P. 5—13.
8. Крылов Ю. М. Дифракция волн в жидкости // Тр. Гос. океанографического института. 1949. Вып. 18. С. 13—18.
9. Takano K. Effets d'un obstacle parallelepipedique sur la propagation de la houle (The effect of a rectangular obstacle on wave propagation) // *La Houille Blanche.* 1960. V. 15. P. 247—267.
10. Takano K. Effet d'un changement brusque de profondeur sur une houle irrotationnelle // *La mer.* 1967. V. 5. N. 2. P. 100—116.
11. Newman J. N. Propagation of water waves over an infinite step // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 23. Pt. 2. P. 339—415.
12. Massel S. R. Harmonic generation by waves propagating over a submerged step // *Coastal Eng.* 1983. V. 7. P. 357—380.
13. Massel S. R. Hydrodynamics of the coastal zone. Amsterdam: Elsevier, 1989. 95 p.
14. Rey V., Belzons M., Guazzellit E. Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 235. P. 453—479.
15. Куркин А. А., Семин С. В., Степаняц Ю. А. Трансформация поверхностных волн над донным уступом // *Известия РАН. ФАО.* 2015. Т. 51, № 2. С. 242—252.
16. Newman J. N. Propagation of water waves past long two-dimensional obstacles // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 23, Pt. 1. P. 23—29.
17. Kreisel J. N. Surface waves // *Quart. Appl. Math.* 1949. V. 7. P. 21.
18. Mei C. C., Black J. L. Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 38. P. 499—511.
19. Miles J. W. Surface-wave scattering matrix for a shelf // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28, Pt. 4. P. 755—767.
20. Marshal J. S., Naghdi P. M. Wave reflection and Transmission by steps and rectangular obstacles in channels of finite depth // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1990. Issue 1. P. 287—301.
21. Green A. E., Naghdi P. M. Directed fluid sheets // *Proc. Roy. Soc. London. Ser.* 1976. V. 347. P. 447—473.
22. Green A. E., Naghdi P. M. Water waves in a nonhomogeneous incompressible fluid // *J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. P. 523—528.
23. Green A. E., Naghdi P. M. A nonlinear theory of water waves for finite and infinite depths // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser.* 1986. V. 320. P. 37—70.
24. Green A. E., Naghdi P. M. Further developments in a nonlinear theory of water waves for finite and infinite depths // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser.* 1987. V. 324. P. 47—72.
25. Giniyatullin A. R., Kurkin A. A., Semin S. V., Stepanyants Y. A. Transformation of narrowband wavetrains of surface gravity waves passing over a bottom step // *Math. Model. Natural Proc.* 2014. V. 9, N. 5. P. 32—41.
26. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
27. Mirchina N. R., Pelinovski E. N. Nonlinear transformation of long waves at a bottom step // *J. Korean Society of Coastal and Ocean Engineers.* 1992. V. 4, N. 3. P. 161—167.
28. Djordjevic V. D., Redekopp L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // *J. Phys. Oceanogr.* 1978. V. 8. P. 1016—1024.
29. Pelinovsky E. N. et al. Solitary wave transformation on the underwater step: theory and numerical experiments // *Applied Math Computations.* 2010. V. 217, N. 4. P. 1704—1718.
30. Seabra-Santos F. J., Renouard D. P., Temperville A. M. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 117—134.

31. *Losada M. A., Vidal C., Medina R.* Experimental study of the evolution of a solitary wave at an abrupt junction // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94. P. 14557—14566.
32. *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
33. *Adcroft J.* et al. MITgcm User Manual. MIT Department of EAPS. 2008. 464 p.
34. *Marshall J.* et al. A Finite-volume, incompressible Navier-Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 5753—5766.
35. *Marshall J.* et al. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and non-hydrostatic ocean modeling // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. P. 5733—5752.
36. *Степанянец Ю. А.* О распространении солитона в неоднородной длинной линии // *Радиотехника и электроника.* 1977. Т. 22, № 5. С. 995—1002.
37. *Худнер И. С.* Деформация волн прямоугольным уступом // *Труды коорд. совещ. по гидротехнике.* Л.: ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1973. Вып. 84. P. 75—80.
38. *Churaev E. N., Semin S. V., Stepanyants Y. A.* Transformation of internal waves passing over a bottom step // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 368. P. R3-1—R3-11.
39. *Семин С. В.* Трансформация поверхностных и внутренних волн над донным уступом. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева. Нижний Новгород, 2015. 146 с.
40. *Maderich V.* et al. Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. P. 076602.
41. *Talipova T.* et al. Internal solitary wave transformation over a bottom step: Loss of energy // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. P. 032110.
42. *Apel J., Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A., Lynch J. F.* Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121. N. 2. P. 695—722.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015 г.

УДК 551.465

© Р. Гримшоу

Университет Лафборо, Великобритания
r.h.j.grimshaw@lboro.ac.uk

Влияние фонового течения в моделях длинных нелинейных внутренних волн

Уравнение Кортевега—де Вриза является стандартной моделью для описания динамики длинных нелинейных внутренних волн в океане. Когда принимаются во внимание слабые воздействия вращения Земли и поперечных возмущений, то уравнение изменяется к форме так называемого модифицированного уравнения Кадомцева—Петвиашвили с вращением. В этой короткой статье дана ревизия асимптотической процедуры вывода этого уравнения с учетом фонового сдвигового течения так же, как и фоновой стратификации.

Ключевые слова: солитоны внутренних волн, уравнение Кадомцева—Петвиашвили, уравнение Островского.

R. Grimshaw

Loughborough University, U.K.
r.h.j.grimshaw@lboro.ac.uk

Effect of a Background Shear Current on Models for Nonlinear Long Internal Waves

The Korteweg—de Vries equation is a standard model for the description of long nonlinear internal waves in the ocean. When the effect of weak transverse variations and the Earth's background rotation are taken into account, this is replaced by the rotation-modified Kadomtsev—Petviashvili equation. In this short note we revisit the asymptotic derivation of this equation, incorporating a background shear flow as well as the background stratification.

Key words: Internal solitary waves, Kadomtsev—Petviashvili equation, Ostrovsky equation.

It is well known that the internal solitary waves commonly observed in the coastal ocean can be modelled by the Korteweg—de Vries (KdV) equation, or a related equation, see the reviews by Grimshaw [1] and Helfrich and Melville [2] for instance. When expressed in a reference frame moving with the linear long wave speed c_0 , the KdV equation is

$$A_t + \mu A A_x + \lambda A_{xxx} = 0.$$

Here x, t are space and time coordinates, and $A(x, t)$ is the amplitude of the linear long wave mode $\varphi(z)$ corresponding to the linear long wave phase speed c_0 , which is determined from the modal equation, given by

$$(\rho_0 W_0^2 \varphi_z)z + \rho_0 N^2 \varphi = 0; \quad W_0 = c_0 - u_0(z); \quad -h < z < 0; \quad (1)$$

$$\varphi = 0 \text{ at } z = 0; \text{ and } W_0^2 \varphi_z = g\varphi \text{ at } z = 0. \quad (2)$$

Here $\rho_0(z), u_0(z)$ are the background density and current respectively and $\rho_0 N^2 = -g\rho_{0z}$. The fluid occupies the domain between the rigid bottom $z = -h$ and the free surface at $z = 0$. The coefficients μ and λ are given by certain integrals involving the modal function,

$$I\mu = \int_{-h}^0 \rho_0 W_0^2 \varphi_z^3 dz, \quad I\lambda = \int_{-h}^0 \rho_0 W_0^2 \varphi^2 dz, \quad I = 2 \int_{-h}^0 \rho_0 W_0 \varphi_z^2 dz.$$

However, oceanic internal waves are often observed to propagate for long distances over several inertial periods, and hence the effect of the Earth's background rotation needs to be taken into account. At the same time it may be necessary to take account of weak dependence on the transverse variable y . The simplest model equation which takes account of both these effects is the rotation-modified Kadomtsev—Petviashvili (KP) equation, see Grimshaw [3],

$$\{A_t + \mu A A_x + \lambda A_{xxx}\}_x + \beta A_{yy} - \gamma f^2 A = 0. \quad (3)$$

Here f is the Coriolis parameter measuring the Earth's rotation. This is an extension of the KP equation, see Kadomtsev and Petviashvili [4], which includes the y -variations on the one hand, and of the Ostrovsky equation, see Ostrovsky [5] for the original derivation or Grimshaw and Helfrich [6] for a recent account, which includes the rotational term on the other hand. In the absence of a background shear flow, that is $u_0(z) \equiv 0$,

$$\beta = \frac{c_0}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2c_0}. \quad (4)$$

The explanation for these expressions lies in the linear dispersion relation for long waves, which is $\omega^2 \approx c_0^2(k^2 + l^2) + f^2$, for a frequency ω and wavenumbers k, l in the x, y -directions respectively. The dominant balance is $\omega \sim kc_0$, and moving to the reference frame moving with speed c_0 and adding the next order cubic linear dispersive correction, leads to the KdV equation. When weak y -dispersion ($l^2 \ll k^2$) and weak rotation are added, this becomes $\omega \sim kc_0 + c_0 l^2/2k + f^2/2kc_0$, and so leads to equation (3). A more formal asymptotic derivation was given by Grimshaw [3]. Note that here in the absence of a shear flow, $\lambda\beta > 0, \lambda\gamma > 0$ so that the KP part here is KPII and the rotational part is the regular Ostrovsky equation.

In this note we determine the coefficients β, γ when there is a background shear flow present. The expression for γ when there is no y -variation was derived by Grimshaw [7] using a formal asymptotic expansion, and here we reproduce that result using an alternative approach based on linear long wave theory. At the same time we derive the expression for β when there is a shear flow. But note that in the presence of background rotation a shear current leads to a term in the basic state, the Coriolis term $f\rho_0 u_0$ in the y -momentum equation, which in an inviscid conservative model needs to be balanced by a pressure gradient in the y -direction. However, this introduces a (weak) dependence on y , which is a complication we avoid here by supposing instead that this Coriolis term is balanced by a z -dependent body force. The case when there is a weak y -dependence will be addressed in a future study.

Rotational and transverse dispersion terms for a shear flow. Since both the terms of interest in equation (3) are linear and in the long wave regime, it is sufficient to consider only the linear long wave equations. Relative to a background shear flow u_0 and a background density field ρ_0 , and on an f -plane, these are, in the domain $-h < z < 0$,

$$\rho_0(u_t + u_0 u_x + u_{0z} w - \varepsilon^2 FV + p_x) = 0, \quad (5)$$

$$\rho_0(V_t + u_0 V_x + Fu) + Fu_0 \rho + p_y = 0, \quad (6)$$

$$p_z + g\rho = 0, \quad (7)$$

$$u_x + \varepsilon^2 VY + w_z = 0, \quad (8)$$

$$\zeta_t + u_0 \zeta_x - w = 0, \quad (9)$$

$$\rho_t + u_0 \rho_x + w \rho_{0z} = 0. \quad (10)$$

Here we have used a standard notation, ζ is the vertical particle displacement and we have put $Y = \varepsilon y$, $V = \varepsilon v$ and $F = \varepsilon f$ to represent the slow scales for transverse dependence and the background rotation. The boundary conditions are

$$w = 0; \text{ at } z = -h, \quad (11)$$

$$p - g\rho_0 \zeta = 0; \text{ at } z = 0. \quad (12)$$

It is convenient to look at the linear long wave theory in Fourier space, for a disturbance proportional to $\exp(ikx - ikct)$. Then equations (5)–(10) become, after eliminating w, ρ ,

$$\begin{aligned} \rho_0(-ikW(u + u_{0z}\zeta) - \varepsilon^2 FV) + ikp &= 0, \\ \rho_0(-ikWV + Fu) - Fu_0 \rho_{0z} \zeta + pY &= 0, \\ \rho_0 N^2 \zeta + pz &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$iku + \varepsilon^2 VY - ik(W\zeta)z = 0, \quad (14)$$

where $W = c - u_0$. Next we use (17) to eliminate u and so obtain in place of (14), (15),

$$\rho_0(-ikW^2\zeta_z + \varepsilon^2(WV_Y - FV)) + ikp = 0, \quad (15)$$

$$\rho_0 W(-ikV + F\zeta_z) - F(u_0\rho_0)_z \zeta + p_Y = 0. \quad (16)$$

Together with (13) these form three equations for ζ, p, V . The final step is to eliminate p between (13) and (15) to obtain

$$(\rho_0 W^2 \zeta_z)_z + \rho_0 N^2 \zeta = \varepsilon^2 G, \quad -h < z < 0,$$

$$ikG = \{\rho_0(WV_Y - FV)\}_z.$$

The boundary conditions (11), (12) can likewise be reduced to

$$\zeta = 0; \text{ at } z = -h,$$

$$W^2 \zeta_z - g\zeta = \varepsilon^2 H; \text{ at } z = 0,$$

$$ikH = WV_Y - FV.$$

Next, we expand in powers of ε^2 ,

$$\zeta = A\varphi(z) + \varepsilon^2 \zeta_1 + \dots, \quad c = c_0 + \varepsilon^2 c_1 + \dots,$$

Here we have anticipated that at the leading order we obtain the modal equations (1) and (2), and the amplitude A depends parametrically on k, c, Y . Then at the next order we get that

$$(\rho_0(W_0^2 \zeta_{1z})_z + \rho_0 N^2 \zeta_1 = G_1 = -2c_1(\rho W_0 \varphi_z)_z + G, \quad -h < z < 0, \quad (17)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad z = -h; \quad W_0^2 \varphi_{1z} - g\varphi_1 = H_1 = -2c_1 W_0 \rho_0 \varphi_z + H, \quad z = 0. \quad (18)$$

Here the terms G, H are evaluated using the leading order expressions for ζ and p in (19), so that equations (17), (18) are a forced version of the modal equation. For a solution to exist, a compatibility condition must be satisfied. This is

$$\int_{-h}^0 G_1 \varphi dz = [\rho_0 H_1 \varphi]_{z=0}. \quad (19)$$

Substituting from (17), (18) we get that

$$ikIc_1 A - \int_{-h}^0 \rho_0 (W_0 V_0 - FV) \varphi_z dz = 0, \quad (20)$$

while V can be evaluated to leading order from (16),

$$ik\rho_0 W_0 V = \rho_0 W_0^2 \varphi_z A_Y - F(\rho_0 u_0)_z A \varphi + \rho_0 F W_0 A \varphi_z. \quad (21)$$

Substitution of (21) into (20) leads to

$$k^2 c_1 A + \beta A_{YY} + F\beta_1 A_Y - \gamma F^2 A = 0, \quad (22)$$

$$I\beta = \int_{-h}^0 \rho_0 W_0^2 \varphi_z^2 dz,$$

$$I\beta_1 = - \int_{-h}^0 (\rho_0 u_0)_z \varphi_z \varphi dz, \quad (23)$$

$$I\gamma = \int_{-h}^0 \rho_0 \Phi \varphi_z dz, \quad \rho_0 W_0 \Phi = \rho_0 W_0 \varphi_z - (\rho_0 u_0)_z \varphi.$$

We now convert the Fourier variables to physical space, using $kc_1 \leftrightarrow i\partial/\partial t$ and $k \leftrightarrow -i\partial/\partial x$. Restoring the nonlinear terms and the linear dispersive term we conclude that (22) is equivalent to

$$\{At + \mu AA_x + \lambda A_{xxx}\}_x + \beta A_{yy} + \beta_1 f A_y - \gamma f^2 A = 0. \quad (24)$$

Here we have restored the unscaled variables y, f .

Discussion. In this note we have extended the analysis of Grimshaw [7] for the Ostrovsky equation in the presence of a background shear flow to the rotation-modified KP equation. The outcome is equation (24). We see that in comparison to (3), there is an extra term, fA_y , with coefficient β_1 , due to the combined effect of rotation, transverse variations and the presence of a shear current.

In the absence of a shear current, $\beta_1 = 0$ and β, γ reduce to (4). The coefficient β of the term A_{yy} has the same sign as λ , and can be written in the form

$$\beta = \frac{c_0}{2} - \frac{1}{I} \int_{-h}^0 u_0 W_0 \Phi_z^2 dz.$$

Hence the shear current provides a small correction term relative to $c_0/2$, which can be expected to be relatively positive or negative according as u_0 is negative or positive. The amended coefficient γ of the term $f^2 A$ agrees with that obtained by Grimshaw [7] in the absence of y -variations. It can usually be expected to have the same sign as λ , but may have the opposite sign if the shear current is sufficiently strong, see Alias et al. [8].

The most interesting outcome here is the presence of the term in fA_y which arises only when there is rotation, a shear current and transverse variations. However, we caution that this extra term has this form because we have chosen here to balance the Coriolis term $f\rho_0 u_0$ in the basic state with a body force, rather than a pressure gradient in the y -direction. Nevertheless, its presence here implies that in the linearised theory the linear dispersion relation for solutions proportional to $\exp(ikx + ily - i\omega t)$ is

$$\omega k + \lambda k^4 - \beta l^2 + if\beta_1 l - \gamma f^2 = 0.$$

The complex term here implies that either there is an instability with growth rate $f\beta_1 l/k$, or that the y -wavenumber l is complex-valued with an imaginary part $i\beta_1 f/2\beta$. Neither consequence is satisfactory, implying that the more complicated theory is needed, when the Coriolis term $f\rho_0 u_0$ is balanced by a pressure gradient in the y -direction, with a consequent y -dependence of all terms in the basic state. But we note that in the latter case the offending term can be removed in the linearized equation by putting $A = A' \exp(-f\beta_1 y/2\beta)$, when the same equation is obtained, but there is no term in A_y' and the coefficient γ is changed to $\gamma - \beta_1^2/4\beta$. However, there is then a consequence that the nonlinear coefficient μ is replaced by $\mu \exp(-f\beta_1 y/2\beta)$.

Finally we note that the coefficient β_1 is non-zero even in the Boussinesq approximation, when ρ_0 in (23) can be regarded as constant, and at the upper boundary $\varphi \approx 0$. In this limit

$$\beta_1 \approx \int_{-h}^0 \rho_0 u_{0zz} \frac{\varphi^2}{2} dz.$$

Thus β_1 is non-zero in general unless $u_{0zz} \equiv 0$.

Литература

1. Grimshaw R. Internal solitary waves. Environmental Stratified Flows. Chapter 1 / Ed. R. Grimshaw. Kluwer, Boston, 2001. P. 1—29.
2. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 395—425.
3. Grimshaw R. Evolution equations for weakly nonlinear, long internal waves in a rotating fluid // Stud. Appl. Math. 1985. V. 73. P. 1—33.
4. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. О стабильности солитонов в средах со слабой дисперсией // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753—756.
5. Островский Л. А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18, № 2. С. 181—191.
6. Grimshaw R., Helfrich K. R. The effect of rotation on internal solitary waves // IMA J. Appl. Math. 2012. V. 77. P. 326—339.
7. Grimshaw R. Models for nonlinear long internal waves in a rotating fluid // Fundam. Prikl. Gidrofiz. 2013. V. 6. P. 4—13.
8. Alias A., Grimshaw R. H. J., Khusnutdinova K. R. Coupled Ostrovsky equations for internal waves in a shear flow // Phys. Fluids. 2014. V. 26. P. 1226603.

Статья поступила в редакцию 20.02.2015 г.

УДК 532.59:534.1

© В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

internalwave@mail.ru

Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины

Рассматриваются поля внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины. В предположении линейного наклона дна, с использованием преобразования Канторовича—Лебедева получены точные решения, описывающие отдельную моду и полное волновое поле внутренних гравитационных волн. Отдельная волновая мода выражается через гипергеометрическую функцию, полное волновое поле описывается полулогарифмической функцией. Построены ВКБ-асимптотики как отдельной волновой моды, так и полного волнового поля. Для параметров среды, характерной для реального океана (Бискайский залив), приведены результаты численных расчетов волновых полей по асимптотическим формулам. Было проведено сравнение с результатами численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном, и показано, что амплитудно-фазовая структура волновых полей хорошо описывается полученными в работе асимптотическими формулами. Имеющиеся натурные данные также показывают, что волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн над неровным дном. В частности аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины были получены в работе без использования математического аппарата геометрической оптики.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, лучевой метод, ВКБ-приближение, преобразование Канторовича—Лебедева.

V. V. Bulatov, Yu. V. Vladimirov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

internalwave@mail.ru

Internal Gravity Waves Dynamics in Stratified Medium of Non-Uniform Depth

The internal gravity waves fields in a stratified fluid layer of variable depth are considered. Assuming a linear slope bottom, the exact solutions are obtained using the Kantorovich—Lebedev transform which describe an individual wave mode and a full wave field of internal gravity waves. Individual wave mode is expressed in terms of the hypergeometric function, the full wave field is described by semi-logarithmic function. WKBJ-asymptotics are constructed both for individual wave mode and for a full wave field. For the parameters of the stratified medium, which is characteristic for a real ocean (Bay of Biscay), the results of numerical calculations of the wave fields of asymptotic formulas are presented. A comparison with the results of numerical simulation of the complete system of hydrodynamic equations describing the evolution of nonlinear wave disturbances over a non-uniform ocean bottom, and it is shown that the amplitude-phase structure of the wave field is described by obtained in the paper asymptotic formulas. Available measurements data also show that the wave pattern with a strong beam structure can be observed in a real ocean, especially in the study of the evolution of a package of internal gravity waves over a non-uniform ocean bottom. In particular, analytical, numerical and measurements data show that the width of the wave ray decreases when approaching the shore. Typical ray pattern of the internal gravity waves in a stratified fluid layer of variable depth have been obtained without using of WKBJ-technics.

Key words: internal gravity waves, stratified medium, ray method, WKBJ-approximation, Kantorovich—Lebedev transform.

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы наблюдается рост интереса к изучению динамики волновых движений стратифицированных сред [1—10]. В основе анализа, как правило, лежат асимптотические методы, так как на базе изучения невозмущенных уравнений гидродинамики формируются асимптотические разложения (анзацы, *Ansatz* (нем.) — виды решения), позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред [11—15]. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы [11—13]. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели в дальнейшем входят в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина динамики волн, позволяющая проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь. Однако иногда, даже несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить физически интересные результаты [6—8, 14].

В этой связи можно отметить задачи об эволюции внутренних гравитационных волн в плавно-неоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [6—8, 14, 15]. Построенные модельные решения, описывающие структуру полей отдельных волновых мод в вертикально стратифицированной среде, позволили в дальнейшем получить асимптотические представления полей внутренних волн с учетом изменчивости среды не только по вертикали и горизонтали, но и по времени. Кроме того, оказалось, что построенные решения вполне согласуются с результатами натурных наблюдений волновых полей [9, 16—21]. Необходимо подчеркнуть, что в силу значительных математических трудностей, как правило, удается построить или асимптотические представления волновых полей, или точные решения для монохроматических волн [6—8, 15].

Постановка задачи и интегральные представления решения. В рамках линейной теории исследуется невязкая, несжимаемая неоднородная среда с невозмущенной плотностью $\rho_0(z)$, ограниченной поверхностью $z = 0$ и дном $z = \gamma y$ (ось z направлена вверх, γ — наклон дна). В точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, находящейся внутри клина, имеется точечный источник массы мощностью Q и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Система уравнений гидродинамики для малых возмущений плотности ρ^* , давления p^* и компонент скорости (u_1, u_2, w) имеет вид [1, 3, 5]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + g\rho^*, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= Q \exp(-i\omega t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести. В качестве граничных условий возьмем условие «твердой крышки» на поверхности и условие непротекания на дне

$$w = 0 \text{ при } z = 0, \quad w + u_2 \gamma = 0 \text{ при } z = \gamma. \quad (2)$$

Далее, предполагая у всех решений гармоническую зависимость от времени: $(p^*, \rho^*, u_1, u_2, w) = \exp(-i\omega t)(p^*, \rho^*, U_1, U_2, W)$, из (1) можно получить следующую систему уравнений с граничными условиями (2)

$$i\omega \rho_0 U_1 = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i\omega \rho_0 U_2 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad i\omega \rho_0 W = -\frac{c^2 \partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad i\omega\rho = \frac{W\partial\rho_0}{\partial z}, \quad (3)$$

где $c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)$, $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z}$ — частота Брента—Вяйсяля, которая в дальнейшем предполагается постоянной: $N(z) = N = \text{const}$. В приближении Буссинеска система (3) сводится к одному уравнению, например для возмущенного давления с соответствующими граничными условиями [6—8]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = -i\omega Q\rho_0\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)/c^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ при } z = -\gamma y. \quad (5)$$

Под значением ρ_0 в правой части (4) в силу относительно малого изменения $\rho_0(z)$ в океане понимается, например, значение плотности морской воды на поверхности, то есть далее $\rho_0 = \rho_0(0) = \text{const}$ [1, 3, 5]. Решение $p(x, y, z)$ должно стремиться к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$. После нахождения функции $p(x, y, z)$, компоненты скорости (U_1, U_2, W) можно найти из первых трех уравнений системы (3), а плотность ρ — из пятого уравнения этой системы.

Сделаем далее замену переменных:

$$y = r\text{ch}\varphi, \quad z = -cr\text{sh}\varphi, \quad r = \sqrt{y^2 - z^2/c^2}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{cy - z}{cy + z}. \quad (6)$$

Осуществим преобразование Фурье по переменной x (не умаляя общности можно положить далее $x_0 = 0$). Учитывая, что модуль якобиана перехода от координат (y, x) к (r, φ) равен cr , из (4)—(5) получим для Фурье образа $P(r, \varphi, l)$ функции $p(r, \varphi, x)$ следующую плоскую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{r\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - l^2 P = \frac{q}{r} \delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_r, \quad (8)$$

$$r_0 = \sqrt{y_0^2 - z_0^2/c^2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{cy_0 - z_0}{cy_0 + z_0}, \quad \varphi_r = \frac{1}{2} \ln \frac{c+\gamma}{c-\gamma}, \quad q = i\omega Q\rho_0/c. \quad (9)$$

Решение трехмерной краевой задачи (4), (5) в переменных (r, φ, x) получается из решения плоской задачи (7), (8) с помощью обратного преобразования Фурье

$$p(r, \varphi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \varphi, l) \exp(ikx) dl. \quad (10)$$

Далее будем предполагать, что наклон дна γ меньше c , или, используя терминологию [15], считать наклон дна докритическим (критический наклон $\gamma = c$). Однородное уравнение (7) с нулевой правой частью имеет убывающие на бесконечности действительные решения: $P(r, \varphi, l) = K_{\mu}(lr)\cos(\mu\varphi)$, где μ — любое действительное число, $K_{\mu}(lr)$ — функция МакДональда мнимого индекса, удовлетворяющая параметрическому модифицированному уравнению Бесселя: $K_{\mu}(lr) = 0$, $L = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + (\mu^2 - r^2 l^2)$. Отметим, что функция $K_{\mu}(lr)$ — вещественна, если значения μ вещественны и аргумент lr положительный. Исходя из этого, для представления дельта функции $\delta(r-r_0)$ воспользуемся парой прямого и обратного преобразования Канторовича—Лебедева:

$$F(\mu) = \int_0^{+\infty} K_{\mu}(x) \frac{f(x)}{x} dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{\mu}(x) F(\mu) \mu d\mu.$$

Отсюда можно получить разложение для дельта-функции (условие полноты) в виде

$$\delta(r - r_0) = \frac{2}{r\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu. \quad (11)$$

Решение задачи (7) будем искать в виде

$$P(r, \varphi, l) = \frac{2q}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \Phi_\mu(\varphi) \mu d\mu. \quad (12)$$

с неизвестной пока функцией угловой переменной $\Phi_\mu(\varphi)$. Подстановка (11) и (12) в (7) приводит к следующей краевой задаче для определения этой функции

$$\frac{d^2 \Phi_\mu(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi_\mu(\varphi) = -\delta(r - r_0), \quad (13)$$

$$\frac{d\Phi_\mu(0)}{d\varphi} = \frac{d\Phi_\mu(\varphi_r)}{d\varphi} = 0.$$

Из (13) видно, что функция $\Phi_\mu(\varphi)$ является угловой функцией Грина и имеет следующий вид:

$$\Phi_\mu(\varphi) = -\frac{1}{\mu^2 \varphi_r} - \frac{2}{\varphi_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\mu^2 - \mu_n^2}, \quad \mu_n = 2\pi n / \ln \left(\frac{c + \gamma}{c - \gamma} \right), \quad n \geq 1.$$

Точное решение и асимптотика отдельной волновой моды. Рассмотрим в выражении для $P(r, \varphi, l)$ из (12) отдельную волновую моду ($n \geq 1$)

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{4q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r \pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (14)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (14) также пригодна и для случая $n = 0$, если в ней положить $\mu_0 = 0$, а коэффициент перед интегралом уменьшить в два раза. Рассмотрим сначала случай $r > r_0$. С целью деформирования контура интегрирования по μ в выражении (14) воспользуемся формулой: $K_\nu(t) = \pi(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)) / (2 \sin(\pi\nu))$, которая в данном случае при $\nu = i\mu$ для функции $K_{i\mu}(lr_0)$ приобретает вид:

$$K_{i\mu}(lr_0) = -\pi \text{Im} (I_{i\mu}(lr_0)) / \text{sh}(\pi\mu), \quad (15)$$

так как функции $I_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(-x)$ являются комплексно-сопряженными. Подынтегральная функция в (15) является четной по μ , поэтому с помощью соотношения (15) можно получить

$$P_n(r, \varphi, l) = \frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\pi \varphi_r} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{i\mu}(lr) I_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (16)$$

Теперь контур интегрирования в (16) можно замкнуть в нижнюю полуплоскость. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся асимптотиками $K_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(x)$ при $\mu = -iv$, $v \rightarrow \infty$: $K_\nu(lr) \approx \sqrt{\pi / 2\nu} (2\nu / elr)^\nu$, $I_\nu(lr_0) \approx \sqrt{\pi / 2\nu} (2\nu / er_0 l)^\nu / 2\sqrt{2}$. Тогда можно получить: $K_\nu(lr) I_\nu(lr_0) \approx \pi \exp(-v(\ln r - \ln r_0)) / 4v\sqrt{2}$. Отсюда видно, что подынтегральное выражение экспоненциально мало в нижней полуплоскости при $r > r_0$. Тогда, учитывая вычеты в точках $\mu = \pm i\mu_n$, имеем:

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \text{Re} (K_{i\mu_n}(lr) I_{i\mu_n}(lr_0)). \quad (17)$$

В случае $r < r_0$ представим в виде (15) уже функцию $K_{i\mu}(lr)$ и, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим выражение (17), в котором надо поменять местами r и r_0 . Полученные выражения можно объединить в одно, если обозначить $r_- = \min(r, r_0)$, $r_+ = \max(r, r_0)$

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \operatorname{Re} \left(K_{i\mu_n}(lr_+) I_{i\mu_n}(lr_-) \right).$$

Для случая $n = 0$ аналогично будем иметь

$$P_0(r, \varphi, l) = -\frac{q}{\varphi_r} \operatorname{Re} \left(K_0(lr_+) I_0(lr_-) \right).$$

Проведем теперь обратное преобразование Фурье (10) для n -ой моды ($n \geq 0$) и учтем, что установившаяся стоячая волна — четная функция по переменной x , и в результате получим:
 $p_n(r, \varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(r, \varphi, l) \cos(lx) dl$. Полученный интеграл выражается через гипергеометрическую функцию

$$p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q \varepsilon_n \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\sqrt{\pi r r_0} \varphi_r} \operatorname{Re} Z, \quad (18)$$

$$Z = \frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} \left(\tau/2 \right)^{i\mu_n + 1/2} F \left(\frac{i\mu_n + 1/2}{2}, \frac{i\mu_n + 3/2}{2}, i\mu_n + 1, \tau^2 \right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция, $\tau = 2rr_0/(r^2 + r_0^2 + x^2)$, $\varepsilon_n = 1/2$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 1$ при $n \geq 1$. Полное решение получается суммированием всех мод:

$p(r, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \varphi, x)$, где r и φ определяются из (6), а $r_0, \varphi_0, \varphi_r$ — из (9). Заметим, что полю вдали от источника возмущений, то есть большим значениям r, x соответствуют малые τ , и отдельную моду $p_n(r, \varphi, x)$ можно аппроксимировать при помощи разложения гипергеометрической функции в ряд при $0 \leq z < 1$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \dots, \quad (19)$$

где $\alpha = \frac{i\mu_n + 1/2}{2}$, $\beta = \frac{i\mu_n + 3/2}{2}$, $\gamma = i\mu_n + 1$. Однако при фиксированном z с увеличением номера моды n в разложении (19) приходится брать все большее число членов ряда (количество членов $m \approx \mu_n z$), что затрудняет расчет волновых мод с большими номерами. Имея в виду дальнейшее суммирование ряда (19), воспользуемся ВКБ асимптотикой гипергеометрической функции из (18):

$$F(\tau^2) \approx \exp \left(-\frac{i\mu_n}{2} \left(\ln \frac{\tau^2}{4} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}} \right) \right) / \sqrt[4]{1 - \tau^2}. \quad (20)$$

Далее воспользуемся асимптотикой гамма функции из (18) при больших значениях μ_n :
 $\frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} \approx \exp(-i\pi/4) / \sqrt{\mu_n}$. Окончательно получаем следующее выражение для ВКБ асимптотики при больших μ_n отдельной волновой моды:

$$p_n(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau} \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\sqrt{2\mu_n \pi r r_0} \varphi_r} \cos \left(\frac{\mu_n}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}} + \pi/4 \right). \quad (21)$$

Интересно отметить, что если формально положить в разложении (19) $\mu_n \rightarrow \infty$, а в ВКБ асимптотике (20) для $F(z)$ считать, что $z \rightarrow 0$ и учесть, что $z\mu_n \approx O(1)$, то в обоих случаях получаем одинаковое значение, равное $\exp(-iz\mu_n/4)$. Таким образом, разложения (19) и ВКБ асимптотика (20) внутренне согласованы, то есть имеется область значений z, μ_n , где эти выражения совпадают. Из выражения (21) видно, что амплитуда n -ой моды при больших x, y убывает как $((x^2 + y^2)n)^{-1/2}$. Раскладывая фазу в (21) при малых значениях τ получим, что длина полуволны вдоль оси y при больших y растет как $\pi y/\mu_n$, вдоль оси x — как $\pi x/2\mu_n$. Проведенные численные расчеты для реальных параметров океана

показывают хорошее совпадение точного и асимптотического решений, за исключением непосредственной окрестности источника возмущений, где аргумент гипергеометрической функции стремится к единице, что следует из построения асимптотического решения. Отметим, что выражение (21) формально пригодно при $\mu_n \rightarrow \infty$, однако уже для первой моды $n = 1$ асимптотики (21) качественно верно описывает точные решения. Асимптотику нулевой моды можно вычислить, используя (18), и полагая $\mu_n = 0$. Тогда с учетом: $F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \tau^2\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{1+\tau}} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right)$, где $K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - (x \sin \varphi)^2)^{-1/2} d\varphi$ — эллиптический интеграл первого рода, можно получить следующее выражение:

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2r} r_0 \varphi_r} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right).$$

Далее, используя асимптотику $K(x)$ при $x \rightarrow 1$, главный член которой имеет вид: $K(x) \approx \ln 4 - \ln(1-x)/2$, окончательно получаем выражение для асимптотики нулевой моды:

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2r} r_0 \varphi_r} \left(\ln 4 - \ln\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right) / 2 \right). \quad (22)$$

Отметим, что полное совпадение точного и асимптотического решений имеет место в окрестности источника возмущений, и существует некоторое отличие вдали от него. Это связано с тем, что асимптотика эллиптического интеграла хорошо работает при стремлении аргумента к единице. Тем не менее, в дальней зоне асимптотика качественно верно описывает точное решение, с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Полное поле внутренних гравитационных волн. Полученные асимптотические представления решений для отдельных волновых мод, включая нулевую, дают возможность перейти

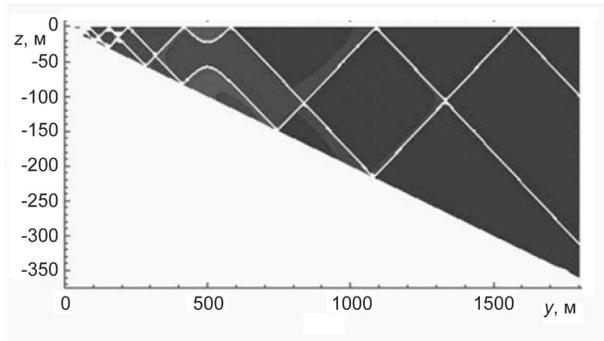


Рис. 1. Полное волновое поле в плоскости (y, z).

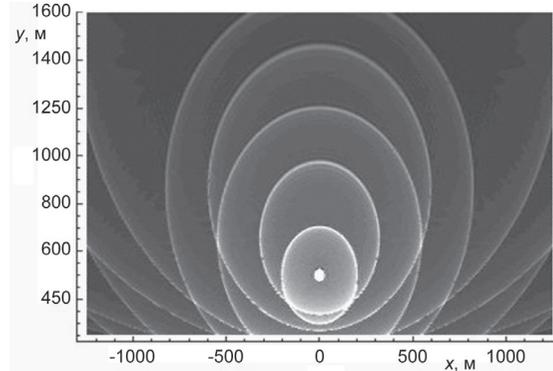


Рис. 2. Полное волновое поле в плоскости (x, y).

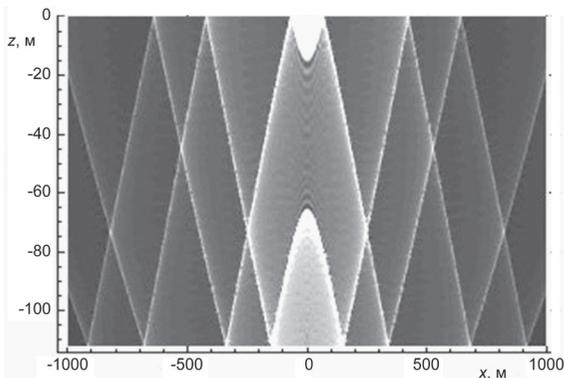


Рис. 3. Полное волновое поле в плоскости (x, z).

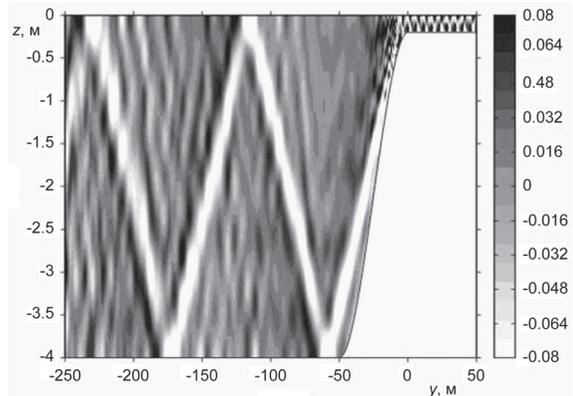


Рис. 4. Численное моделирование динамики внутренних волн в стратифицированной среде переменной глубины: амплитуда вектора скорости, м/с.

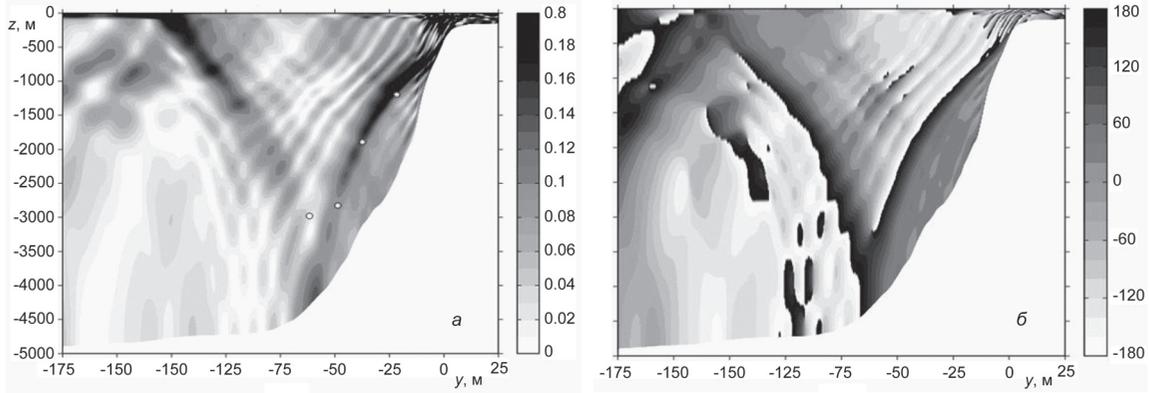


Рис. 5. Внутренние приливные волны на шельфе Бискайского залива.
 а - амплитуда вектора скорости (м/с); б - фаза вектора скорости (градусы).

к вычислению полного волнового поля. Сумма асимптотик (21) бесконечного числа волновых мод ($n = 1, 2, \dots$) выражается через полулогарифмическую функцию:

$$Li_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad B_{\pm}^{\pm} = \exp(i\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r), \quad A(\tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - \tau^2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q\sqrt{\tau} \exp(-i\pi/4)}{8\pi^4 \sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{rr_0} \varphi_r} (Li_{1/2}(B_+^+) + Li_{1/2}(B_-^+) + Li_{1/2}(B_+^-) + Li_{1/2}(B_-^-)). \quad (23)$$

Полное волновое поле есть действительная часть выражения (23) и нулевой моды (22). Полулогарифмическая функция в (23) обращается в бесконечность в точках, где выполнено условие: $\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Геометрическое место точек (x, y, z) , удовлетворяющих этому условию, определяет систему лучей при фиксированной одной переменной. В плоскостях (y, z) и (x, z) эти решения определяют пару восходящих от источника лучей и пару нисходящих лучей с последующим их отражением от наклонного дна.

На рис. 1 изображена теневая картина полного волнового поля (линии уровня) в плоскости (y, z) при $x = 40$ м, остальные параметры расчетов характерны для реальных океанических задач: $N = 0.001 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 0.004 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 0.2$, $c = 0.44$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $Q = 1600 \text{ м}^3/\text{с}$, $y_0 = 500$ м, $z_0 = -4$ м. Из представленных результатов отчетливо видна лучевая структура построенных решений, в частности, совокупность падающих и отраженных лучей, и кроме того, котангенс угла наклона лучей к вертикали примерно равен 0.44 в полном соответствии с лучевой теорией. Действительно, согласно этой теории направление групповой скорости Θ и направление распространения энергии определяется из равенства: $\text{ctg}^2 \Theta = c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)^2$ [6—8]. Сингулярность решения на лучах обусловлена использованной моделью идеальной среды. Основной вклад в сингулярность дает бесконечное число коротковолновых мод с большими номерами. В реальности для получения полного волнового поля надо учитывать конечное число мод, и это число приближенно определяется характерным масштабом Стокса $D = \sqrt{2\nu_0 / N}$, где ν_0 — кинематическая вязкость; N — частота Брента—Вяйсяля. Очевидно, что волновые моды с большими номерами, длина волны которых меньше D , вклада в решение не дают.

На рис. 2 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости при $z = -50$ м, где видна, в частности, картина отражения линий постоянной фазы $2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$ от линии дна $z = -50$ м, $y = -z/\gamma = 250$ м. На рис. 3 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, z) при $y = 560$ м.

Для сравнения с полученными аналитическими результатами на рис. 4 представлены результаты численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном (Бискайский залив, суммировалось более 60 волновых мод) [11—13]. Как видно из представленных результатов, четко идентифицируется лучевая структура решения (рис. 1—3), и, как показывают оценки, амплитудно-фазовая структура волновых полей достаточно хорошо описывается асимптотическими формулами (22)—(23).

На рис. 5 представлены результаты натурных измерений амплитудной и фазовых структур приливных внутренних гравитационных волн в этом же регионе Мирового океана [11—13]. Полученные натурные данные также показывают, что, действительно, полученные волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн над неровным дном. В частности аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Формально, в линейной постановке, ширина отраженного пучка внутренних волн может стать сколь угодно малой при соответствующих соотношениях параметров среды (стратификация, угол наклона дна). То есть происходит существенная локальная интенсификация волн вблизи берега. Однако, очевидно, что в реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), энергия волнового поля остается в таких пространственных областях конечной — включаются нелинейные механизмы диссипации и турбулентного перемешивания [1—5].

В качестве основных результатов, полученных в данной работе, необходимо отметить, что, во-первых, все построенные с использованием преобразования Канторовича—Лебедева решения являются точными, и, во-вторых, характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины получены без использования математического аппарата геометрической оптики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00466).

Литература

1. *Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O. V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 421 p.
2. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
3. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
4. *Коняев К. В., Сабинин К. Д.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеоздат, 1992. 272 с.
5. *Sutherland B. R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
6. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
7. *Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
8. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Волновые движения стратифицированных сред: теория и приложения Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 577 с.
9. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. И. В. Лавренова, Е. Г. Морозова. СПб.: Гидрометеоздат, 2002.
10. *Morozov E. G.* Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides // Waves in geophysical fluids / Eds. by J. Grue, K. Trulsen. Springer Wein NY, 2006. P. 271—332.
11. *Abdilghanie A. M., Diamessis P. J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // Journal of Fluid Mechanics. 2013. V. 720. P. 104—139.
12. *Mauge R., Gerkema T.* Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // Nonlinear Processes Geophysics. 2008. V. 15. P. 233—244.
13. *Rees T., Lamb K. G., Poulin F. J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM Journal of Applied Mathematics. 2012. V. 72(4). P. 1041—1060.
14. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 55—70.
15. *Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V.* Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // IUTAM Procedia. 2013. V. 8. P. 229—237.
16. *Grue J., Sveen J. K.* A scaling law of internal run-up duration // Ocean Dynamics. 2010. V. 60. P. 993—1006.
17. *Морозов Е. Г., Марченко А. В.* Короткопериодные внутренние волны в Арктическом фиорде (Шпицберген) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 4. С. 453—460.
18. *Писарев С. В.* Низкочастотные внутренние волны у кромок шельфа Арктического бассейна // Океанология. 1996. Т. 36, № 6. С. 819—826.
19. *Yang-Yih Chen, Chen G. Y., Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou.* Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom // Coastal Engineering Journal. 2010. V. 52(1). P. 17—42.
20. *Hsu M. K., Liu A. K., Liu C.* A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // Continental Shelf Research. 2000. V. 20. P. 389—410.
21. *Grue J., Jensen A.* Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves // Journal of Geophysical Research. 2012. V. 117. P. C07—C013.

Статья поступила 16.03.2015 г.

УДК 532.59

© Н. В. Гаврилов¹, В. Ю. Ляпидевский^{1,2}, З. А. Ляпидевская³

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск
gavrilov@hydro.nsc.ru

Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом

Рассматривается распространение внутренних волн большой амплитуды над неровным дном. Одной из характерных черт волн большой амплитуды является наличие «захваченного ядра» в волне, то есть области, в которой скорость движения частиц близка и даже превосходит скорость волны. Эти волны широко распространены в океане и наблюдаются в виде приповерхностных волн понижения, придонных волн повышения и прослоечных волн. В работе представлен обзор лабораторных экспериментов по генерации, взаимодействию и затуханию уединенных волн в двухслойной жидкости и иллюстрируются новые возможности применения аналитических и численных решений для интерпретации натуральных экспериментов. На основе математической модели трехслойной мелкой воды построены решения, описывающие эволюцию уединенных волн в шельфовой зоне. Проведенные лабораторные исследования уединенных волн большой амплитуды, распространяющихся в прослойке (симметричные волны второй моды), а также в приповерхностных и придонных слоях (волны понижения и повышения первой моды) показали возможность применения модели для расчета нестационарных волновых процессов, а также полученных из нее точных решений для определения формы и основных параметров этих волн. Анализ полученных решений дает возможность установить основные закономерности трансформации уединенных волн и нелинейных волновых пакетов большой амплитуды в шельфовой зоне моря.

Ключевые слова: стратифицированные течения, лабораторный эксперимент, уединенные волны, трехслойная мелкая вода, шельфовая зона.

N. V. Gavrilov¹, V. Yu. Liapidevskii^{1,2}, Z. A. Liapidevskaya³

¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, Russia

³Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

Transformation of Large Amplitude Internal Waves Over a Shelf

The propagation of finite amplitude internal waves over an uneven bottom is considered. One of the specific features of the large amplitude internal waves is the ability of the waves to carry fluid in the «trapped core» for a long distance. The velocity of particles in the «trapped core» is very close and, even, exceeds the wave speed. Such waves are detected in different parts of seas and oceans as internal waves of depression and elevation as well as short intrusions at interfaces. Laboratory experiments on the generation, interaction and decay of solitary waves in a two-layer fluid are discussed. Analytical and numerical solutions describing the evolution of internal waves in a shelf zone are constructed by the three-layer shallow water model. Laboratory investigations of the different types of internal waves (bottom, subsurface and interlayer waves) are demonstrated, that the model can be effectively applied to the numerical solution of unsteady wave motions, and the travelling waves, which can be found from the model in rather simple form, give the realistic form and governing parameters of internal waves in laboratory and field observations. The basic features of the large amplitude solitary waves and nonlinear wave trains evolution over a shelf can be represented by the model.

Key words: stratified flows, laboratory experiment, solitary waves, three-layer shallow water, shelf zone.

Нелинейные внутренние волны, генерируемые внутренним приливом и при взаимодействии течений с топографией, играют важную роль в процессах массообмена в шельфовой зоне моря. Основным отличием внутренних волн от поверхностных является возможность генерации и распространения внутренних волн большой амплитуды на большие расстояния без их обрушения. Здесь и далее под внутренними волнами большой амплитуды понимаются вертикальные возмущения линий уровня плотности, намного превосходящие начальную толщину характерного (чаще всего однородного) слоя, ограниченного резким пикноклином, по которому и распространяется внутренняя волна. Эти волны широко распространены в океане и наблюдаются в виде приповерхностных волн понижения, придонных волн повышения и прослоечных волн [1—3]. Конечно, в природных условиях прослоечные внутренние волны второй моды наблюдать сложно, но в лабораторных условиях они генерируются достаточно просто и являются объектом интенсивных исследований экспериментальными и теоретическими методами [4—8]. Интерес к симметричным внутренним волнам второй моды вызван еще и тем, что в лабораторных условиях для этого типа волн удается избежать доминирующего влияния эффектов трения, характерных для течений малых масштабов. Информация о структуре и особенностях распространения симметричных волн может быть использована для моделирования волн большой амплитуды в натуральных условиях.

Одной из характерных черт волн большой амплитуды является наличие «захваченного ядра» в волне, то есть области, в которой скорость движения частиц близка и даже превосходит скорость волны [9—10]. Так как уединенные волны движутся со скоростью, близкой к постоянной на масштабах длины, сравнимой с глубиной жидкости, то эффективной гипотезой оказывается предположение о гидростатичности распределения давления в «захваченном ядре». В то же время, негидростатичность распределения давления во внешней области течения определяет форму волны и ее способность распространяться на большие расстояния без существенной потери энергии.

Перечисленные выше свойства позволили построить достаточно простую модель, передающую основные особенности генерации, распространения и взаимодействия волн большой амплитуды [11]. В данной работе приводится обзор лабораторных экспериментов по верификации модели, выполненных в ИГиЛ СО РАН [12—15], и иллюстрируются новые возможности применения построенных аналитических и численных решений для интерпретации натуральных экспериментов [16—19].

Лабораторные эксперименты. Серия лабораторных экспериментов, выполненная в ИГиЛ СО РАН и представленная в работах [11—15], направлена на изучение внутренних волн большой амплитуды. Особенностью проведения этих экспериментов является использование специальных методик, позволяющих визуализировать неоднородность поля плотности и связанную с ней тонкую структуру течения в уединенных волнах различного типа (придонных, приповерхностных, на внутренних границах раздела жидкостей с различной плотностью). Визуализация картины течения, позволяющая определить точные границы невозмущенного поля плотности при прохождении волны и, следовательно, восстановить ее профиль, осуществлялась следующим образом: сквозь толщу жидкости фотографировался равномерно освещенный экран с нанесенными на него наклонными линиями. На участках с высокими градиентами плотности наблюдается сильное искажение этих линий, а в областях интенсивного мелкомасштабного движения, связанного с обрушением внутренних волн и перемешиванием, нарушается оптическая прозрачность жидкости. Для экспериментов по генерации уединенных волн в прослойке между жидкостями различной плотности, схематично изображенных на рис. 1, соответствующие данной методике фотографии экспериментов приведены на рис. 2, 3. Следует отметить, что зоны увеличения градиента плотности соответствуют сгущению линий на фотографиях, а зоны уменьшения градиента — расхождению этих линий. Внешняя граница волнового возмущения может быть четко определена по фотографиям как граница, на которой происходит искажение параллельных линий, соответствующих однородной плотности. Поэтому такая методика удобна для определения профиля волны при сопоставлении с результатами теоретических и численных расчетов.

Для визуализации картины течения применялась также новая методика LIF (Laser Induced Fluorescence). Метод основан на линейной зависимости светимости слабого раствора флуоресцина

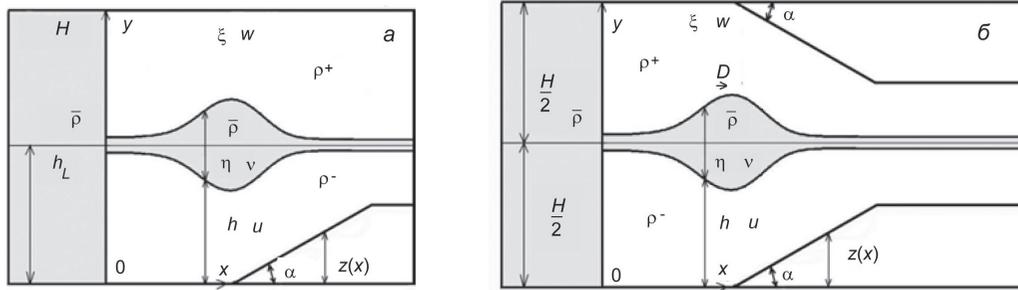


Рис. 1. Схема лабораторного эксперимента.

a — генерация и распространение симметричных уединенных волн второй моды над шельфом; *б* — уединенные волны в симметричном канале, имитирующие распространение приповерхностных волн над склоном. Для генерации волн перегородка, отделяющая подкрашенную жидкость в левом отсеке, поднимается на короткое время. Через некоторое время выпускаемая жидкость трансформируется в уединенную волну.

Здесь H — полная глубина канала; ρ^{\pm} — плотности верхнего и нижнего слоя; $\bar{\rho}$ — плотность промежуточного слоя; h, η, ζ — толщина нижнего, промежуточного и верхнего слоев; u, v, w — средние скорости в этих слоях; $z = z(x)$ — форма дна.

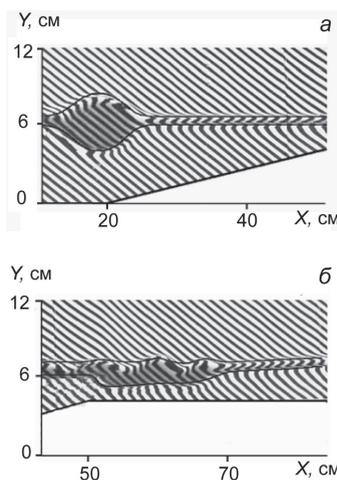


Рис. 2. Трансформация симметричной уединенной волны второй моды над шельфом.

a — уединенная волна над горизонтальным участком дна; *б* — потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне. Подкрашенная жидкость из левого отсека (рис. 1, *a*) визуализирует «захваченное ядро». Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1) [15].

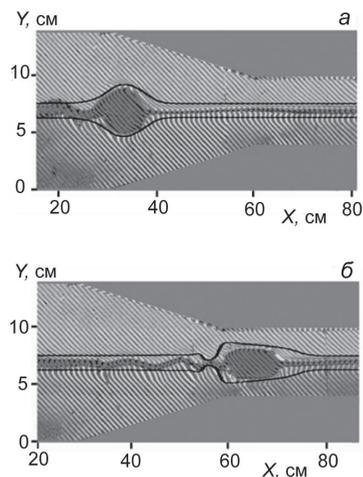


Рис. 3. Уединенная волна второй моды в симметричном канале.

a — уединенная волна над горизонтальным участком дна; *б* — уплощение волны над шельфом. Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1) [13]. Генерация волн осуществлялась так же, как для рис. 2.

от его концентрации при облучении лазером. Данный подход позволяет не только получить качественную информацию о структуре течения (границах волны, областях перемешивания и т. д.), но и найти распределение плотности в нестационарных волновых процессах в стратифицированной жидкости. Для получения плоской картины течения методом «светового ножа» использовался твердотельный лазер с диодной накачкой «Моцарт», обеспечивающий мощное непрерывное излучение на длинах волны 532 нм. Изменением температуры термостата можно регулировать мощность излучения от нескольких мВт до 5 Вт. Система управления позволяет менять ширину и направление светового ножа, а также частоту колебаний зеркала в широком диапазоне. В совокупности с регулировкой мощности лазера это позволяет получить равномерное освещение исследуемой области. Схема экспериментальной установки с использованием лазера приведена на рис. 4. Цифровая видеокамера, предназначенная для регистрации волновых процессов в освещенной области, устанавливалась на расстоянии 2.5 м от лотка.

Для сравнения результатов эксперимента, использующего оцифрованное изображение уединенной волны, полученное с использованием видеокамеры, с данными лабораторных и натуральных наблюдений, в которых применяются неподвижные регистраторы, была разработана специальная

отсутствуют в симметричных уединенных волнах второй моды, и соответствующие лабораторные эксперименты могут быть использованы для моделирования уединенных волн повышения и понижения в течениях большого масштаба, как над неровным дном, так и над склоном [13—15].

Эксперименты, изображенные на рис. 1 и 4, проводились в лабораторном лотке длиной 330 см, шириной 20 см и глубиной 35 см. Стенки лотка изготовлены из плексигласа. Лоток разделялся на две части вертикальной герметичной перегородкой, которая могла подниматься и опускаться для формирования уединенной волны. Геометрическая конфигурация эксперимента по генерации симметричных уединенных волн, распространяющихся в виде коротких интрузий, представлена схемой, изображенной на рис. 1. Для создания плотностной стратификации использовался разбавленный раствор сахара. Относительная разность плотностей в слоях $\varepsilon = (\rho^- - \rho^+)/\rho^-$ составляла 0.5 % во всех экспериментах. При этом вязкость раствора сахара сравнима с вязкостью воды.

Для формирования симметричной уединенной волны в левый отсек заливался раствор промежуточной плотности $\bar{\rho} = 0.5(\rho^+ + \rho^-)$, а глубина нижнего слоя в правом отсеке равнялась половине глубины канала ($h_L = 0.5H$). Выбор длины левого отсека обеспечивал формирование одной уединенной волны над горизонтальным участком дна. В экспериментах над неровным дном в лотке устанавливалось препятствие, имитирующее шельф (рис. 1, а), или канал симметрично сужался сверху и снизу за счет препятствия на дне и специальной формы крышки канала (рис. 1, б). При одинаковой начальной толщине слоев и малых перепадах плотности возмущение, возникающее после удаления перегородки, распространяется вправо в виде симметричной уединенной волны второй моды. Подкрашенная жидкость, находящаяся первоначально в левом отсеке, визуализирует на фотографиях «захваченное ядро» (рис. 2, 3). Для определения границ волны использована описанная выше методика, позволяющая определить зоны больших градиентов плотности при помощи наклонных полос на задней стенке лотка.

В эксперименте по распространению уединенной волны над шельфом (рис. 1, а) первоначально симметричная внутренняя волна (рис. 2, а) деформируется над склоном. При этом потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне могут быть отчетливо визуализированы в ходе эксперимента (рис. 2, б).

Эксперимент с симметричным поджатием канала сверху и снизу (рис. 1, б) обеспечивает сохранение симметричности уединенной волны над неровным дном. На рис. 3 продемонстрировано «уплощение» уединенной волны над шельфом. Кроме того, при распространении над склоном, в отличие от ровного дна, волна генерирует за собой цуг коротких волн первой моды. Как отмечалось выше, данный эксперимент может быть использован для моделирования трансформации поверхностной волны понижения в шельфовой зоне.

Математическая модель. Математические модели распространения внутренних волн большой амплитуды, применяемые в [11—16] для описания эволюции уединенных волн, существенно используют длинноволновое приближение. Предполагается, что длина волны существенно превышает глубину канала, при этом учитывается негидростатичность распределения на фронте волны. Длинноволновое приближение позволяет снизить размерность задачи и перейти к модели многослойной мелкой воды. Уравнения многослойной мелкой воды с учетом негидростатичности распределения давления в окрестности фронта волны (второе приближение) выведены в [20]. Однако для течений многослойной мелкой воды проблема построения и классификации уединенных волн остается весьма сложной. Даже для двухслойной мелкой воды со свободной границей в рамках второго приближения классические солитонобразные решения существуют только для дискретного набора определяющих параметров [21]. В то же время, особенностью внутренних приповерхностных волн большой амплитуды является их распространение с «захваченным ядром», т. е. характерным является перенос частиц жидкости в волне со скоростью, близкой к скорости волны в одном из слоев. Последнее обстоятельство обеспечивает гидростатичность распределения давления в этом слое для волн, распространяющихся со скоростью, близкой к постоянной, и может быть эффективно использовано для построения простых моделей распространения интенсивных внутренних волн. Для стратифицированных течений с малым изменением плотности указанный подход был применен для исследования уединенных волн большой амплитуды в [11—15]. Для произвольного перепада плотностей области существования уединенных волн в двухслойном течении проанализированы в [16].

Различные типы уединенных волн (поверхностные, придонные, прослоечные) удобно описать в рамках общей модели трехслойного течения. В приближении Буссинеска уравнения трехслойного течения с учетом гидростатичности давления в промежуточном слое принимают вид [15]:

$$\begin{aligned}
 h_t + (hu)_x &= 0, \quad \zeta_t + (\zeta w)_x = 0, \quad \eta_t + (\eta v)_x = 0, \\
 u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\beta}{3}h \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left(\frac{d_- h}{dt} \right)^2 + p + bh + \bar{b}\eta + bz + \frac{\beta}{2}h \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\beta}{2} \frac{d_- h}{dt} \frac{d_- z}{dt} + \frac{\beta}{2} \left(\frac{d_- z}{dt} \right)^2 \right)_x &= 0, \\
 w_t + \left(\frac{1}{2}w^2 + \frac{\beta}{3}\zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left(\frac{d_+ \zeta}{dt} \right)^2 + p \right)_x &= 0, \\
 v_t + \left(\frac{1}{2}v^2 + \bar{b}(h + \eta + z) + p \right)_x &= 0, \\
 \frac{d_-}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d_+}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, \\
 b &= (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+, \quad \bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь h , η , ζ — толщина нижнего, промежуточного и верхнего слоев; u , v , w — средние скорости в этих слоях; p — модифицированное давление на верхней границе течения; g — ускорение свободного падения; $z = z(x)$ — форма дна. В приближении Буссинеска

$$h + \eta + \zeta + z = H \equiv \text{const}, \tag{2}$$

причем соотношение (2) выполнено в течениях под крышкой и со свободной поверхностью. В последнем случае появление в уравнениях (1) давления p связано с тем, что в этом приближении свободная поверхность заменяется линией $y = H$. Параметр $\beta = H^2/L^2$ (L — характерная длина волны) при выводе уравнений считается малым. Затем соответствующим растяжением переменных его можно исключить из уравнений, фиксируя при этом отношение вертикального и горизонтального масштабов. Вариация значения β в небольшом интервале ($0.5 \leq \beta \leq 1$) позволяет слегка корректировать ширину уединенной волны [13—15]. Далее положим $\beta = 1$ в (1). Система (1), (2) пригодна для расчета генерации и эволюции внутренних волн первой и второй моды.

На рис. 2 показана трансформация симметричной уединенной волны над склоном в эксперименте, приведенном на рис.1, *a*. Глубина канала $H = 12$ см. Сплошные линии — результаты нестационарного расчета по модели (1), (2) [15]. Эксперимент и вычисления иллюстрируют влияние топографии на перераспределение энергии возмущения между первой и второй модой.

Однако особое значение имеет класс решений, описывающий распространение возмущений, симметричных относительно центральной линии канала $y = H/2$. При этом

$$h + \eta/2 \equiv H/2, \quad \zeta + \eta/2 \equiv H/2, \quad \bar{b} = b/2, \quad z \equiv 0. \tag{3}$$

Как отмечалось выше, эти решения пригодны не только для расчета симметричных уединенных волн второй моды, распространяющихся в прослойке между однородными слоями различной плотности, но и для описания придонных и приповерхностных волн большой амплитуды. При этом в силу симметрии решения достаточно рассмотреть только верхнюю или нижнюю половину решения (относительно линии $y = H/2$).

В дальнейшем изложении остановимся только на перечисленных выше типах уединенных волн. Заметим, что в [15] полная система уравнений (1) использована как для построения точного решения, так и нестационарного численного расчета эволюции несимметричной уединенной волны второй моды. Найдены значения определяющих параметров, при которых возможно распространение такой несимметричной волны с сохранением формы на достаточно большое расстояние.

Симметричные уединенные волны. Следует отметить, что уравнения (1) не являются обобщением уравнений Грина—Нагди на течения многослойной жидкости, т. е. отличаются от выведенных в [20] даже с условием гидростатичности распределения давления в промежуточном слое.

Но поведение решений этих систем согласуется не только качественно, но и количественно. Дело в том, что основные классы решений, а именно, бегущие волны над ровным дном и стационарные течения над неровным дном для этих систем совпадают. Преимуществом (1) является ее запись в дивергентной форме, позволяющая найти численные решения стандартными методами. Для симметричных решений со свойством (3) порядок рассматриваемых систем уравнений может быть понижен. Кроме того, в случае плавно изменяющегося дна (и, соответственно, крышки, см. рис. 1, б), задаваемого функцией вида $z = z_0(\beta x)$, производные этой функции имеют порядок $O(\beta)$, поэтому все члены, содержащие материальные производные d_z/dt имеют порядок $O(\beta^2)$ и могут быть отброшены. В этом случае аналог уравнений Грина—Нагди для описания волн большой амплитуды в двухслойных течениях в безразмерных переменных ($h_L = H/2 = 1$, $\bar{b} = 1$) принимает вид [13]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + (h+z)_x + p_x + \frac{\beta}{3h} \left(h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right)_x &= f^-, \\ v_t + vv_x + p_x &= f^+, \\ hu + (1-h)v &= Q. \end{aligned} \quad (4)$$

В представленных выше экспериментах $Q = 0$. Правые части f^\pm уравнений (4) отражают влияние трения на дне и границе раздела на распространение возмущений. Они могут быть выбраны в виде:

$$\begin{aligned} f^- &= -c_w \frac{u|u|}{h} - c_i \frac{(u-w)|u-w|}{h}, \\ f^+ &= c_i \frac{(u-w)|u-w|}{\eta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь учтено отсутствие трения на границе $y = 1$ в силу симметрии течения. Заметим, что при распространении возмущений вдоль границы раздела в виде симметричных интрузий основной вклад в диссипацию энергии вносят процессы на границе раздела между однородными слоями. Поэтому коэффициент донного трения c_w можно положить равным нулю, а коэффициент межфазного трения c_i отражает развитие мелкомасштабных возмущений и перемешивание в высокоградиентных прослойках между однородными слоями. Поэтому его численное значение существенно превосходит значение c_w . Для численной реализации систему (4) удобно представить в виде [13]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ K_t + \left(Ku - \frac{1}{2}(u-v)^2 + h + z - \frac{\beta}{2} h^2 u_x^2 \right)_x &= f^+ - f^-. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $v = (Q - hu)/(1 - h)$, $K = u - v - \frac{\beta}{3h} (h^3 u_x)_x$, а функции f^\pm заданы в (5).

Уравнения (6) могут быть использованы для расчета симметричных уединенных волн в канале переменного сечения (рис. 1, б), а также приповерхностных волн понижения над склоном [14]. Численная реализация решений (6) основана на методе, развитом в [22]. Переменные h, K рассматриваются в (6) в качестве эволюционных и определяются на следующем слое по времени из соответствующей разностной схемы, являющейся аналогом схемы С. К. Годунова. Затем распределение скорости $u = u(t, x)$ восстанавливается по заданным значениям h, h_x, K из линейного дифференциального уравнения

$$\frac{\beta}{3} h^2 u_{xx} + \beta h h_x u_x - \frac{1-z}{1-h-z} u = -\frac{Q}{1-h-z} - K.$$

На рис. 3 сплошными линиями изображена граница возмущения, распространяющегося в симметричном канале переменного сечения. Начальная форма возмущения определяется точным решением однородной системы (6) над ровным дном, рассмотренным ниже. Расчеты показывают,

что внешние границы волны передаются при ее трансформации над склоном достаточно хорошо. Однако использование модели (6) вместо (1) позволяет описать только развитие возмущений второй моды без учета генерации цуга коротких волн первой моды в следе за основным возмущением (рис. 3, б). Исследование механизма нелинейного обмена энергией между различными модами в рамках модели (1) является темой дальнейших исследований.

Бегущие волны. Однородная система уравнений (6), описывающая эволюцию нелинейных возмущений в двухслойной жидкости над ровным дном ($f^\pm \equiv 0, z \equiv 0$), имеет широкий набор решений типа бегущих волн. Возмущения такого типа распространяются с постоянной скоростью с сохранением формы и могут быть применены для анализа структуры придонных и приповерхностных волн большой амплитуды как в лабораторных, так и природных условиях. Решение (6), представляющее собой уединенную волну, распространяющуюся по невозмущенной двухслойной жидкости, находится в явном виде и эффективно воспроизводит деформацию внутренней границы раздела в реальных стратифицированных течениях.

Рассмотрим решение (6), зависящее от переменной $\xi = x - Dt$ ($D \equiv \text{const}$) и удовлетворяющее следующим условиям:

$$h \rightarrow h_0, u \rightarrow 0, h' \rightarrow 0, h'' \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

(Здесь и далее штрих означает дифференцирование по переменной ξ).

В работах [11—12] показано, что солитонообразные решения задачи (6), (7) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} h(D-u) &= h_0 D, \quad (1-h)(D-v) = (1-h_0)D, \\ (h')^2 &= G_0(h) = \frac{3(h-h_0)^2(\text{Fr}^2 - h + h^2)}{\beta \text{Fr}^2 h_0^2 (1-h)}, \\ \text{Fr} &= D/\sqrt{bH} = D. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что уединенная волна существует при $h^2 - h + \text{Fr}^2 = (h-h^+)(h-h^-) \geq 0$, где $h^\pm = (1 \pm \sqrt{1-4\text{Fr}^2})/2$. Поэтому допустимыми интервалами для глубины h являются

$$0 < h_0 \leq h \leq h^-, \quad (9)$$

$$h^+ \leq h \leq h_0 < 1. \quad (10)$$

Случай (9) соответствует придонной волне повышения (если рассматривается течение в канале $0 \leq y \leq h_L = 1$, (рис. 1, а). Случай (10) представляет приповерхностную волну в таком же канале или нижнюю половину симметричной уединенной волны в канале $0 \leq y \leq H = 2$. В любом случае необходимым условием существования решения является условие $\text{Fr} \leq 1/2$.

Важно отметить, что из соотношений (8) нетрудно получить предел $h_0 \rightarrow 1$, соответствующий приповерхностной волне бесконечно большой амплитуды (по отношению к начальной глубине прослойки) или интрузии, распространяющейся по промежуточной прослойке нулевой толщины. В [11—12] экспериментально показано, что это решение для волн большой амплитуды эффективно представляет форму «захваченного ядра», состоящего из частиц жидкости, переносимых вместе с волной. Из (8) при $h_0 \rightarrow 1$ получаем

$$(h')^2 = G_1(h) = 3\beta^{-1} \text{Fr}^{-2} (1-h)(\text{Fr}^2 - h + h^2). \quad (11)$$

Решение, задающее профиль волны для (8) и (11) представляется в квадратурах

$$\xi = \xi_i(h) = \pm \int_{h_m}^h \frac{ds}{\sqrt{G_i(s)}}, \quad i=0,1. \quad (12)$$

Здесь $h_m = h^+$ для волны понижения и $h_m = h^-$ для волны повышения. Заметим, что значение h_m не зависит от начальной толщины прослойки, а определяется только числом Фруда Fr . На рис. 2, а и рис. 3, а в качестве начального возмущения в прослойке между однородными слоями взяты решения (6), представляющие симметричную бегущую волну с заданной начальной толщиной прослойки.

При этом форма волны и начальное распределение скорости находится из (8), (12) заданием только одного параметра Fr ($0 \leq Fr \leq 0.5$). Отметим также, что профиль уединенной волны зависит только от геометрии канала и не зависит от стратификации. Однако для развертки волнового процесса по времени в фиксированной точке в размерных переменных появляется зависимость ширины волны от перепада плавучести, так как размерная скорость волны $\tilde{D} = Fr \sqrt{bH}$.

На рис. 5 приведен экспериментальный профиль уединенной волны повышения, полученный в эксперименте с использованием светового ножа (рис. 4). И на фотографии уединенной волны (рис. 5, а), и на ее временной развертке при прохождении виртуальной фиксированной точки (рис. 5, б) отчетливо видны внешние границы волны и «захваченное ядро» (темная область). Кроме того, цифровой обработкой изображения можно выделить промежуточные линии уровня, представленные на рис. 5. На этих рисунках показано также решение (8), изображающее внешнюю границу волны (сплошная темная линия). При этом глубина канала составляет $H = 8$ см, начальная глубина 0.9 см, $Fr = 0.494$. Следует отметить, что в придонном слое возмущение распространяется в виде уединенной волны повышения только при наличии перед волной слоя жидкости плотности ρ^- (рис. 4), глубина которого h_0 превосходит некоторую критическую глубину. В противном случае, например, по «сухому руслу» возмущение распространяется в виде гравитационного течения. Зависимость структуры волны в придонных и приповерхностных двухслойных течениях от начальной толщины слоя, по которому эта волна распространяется, изучена в [14].

Затухание уединенных волн. Во многих работах при анализе волновых пакетов конечной амплитуды в лабораторных и натуральных условиях для отдельных волн используется термин «солитон». Как было проиллюстрировано выше на рис. 2, а, 3, а и 5, действительно, точное решение (8), задающее солитонообразное решение при отсутствии трения в модели (6), хорошо передает мгновенный профиль волны. Но лабораторные эксперименты по распространению уединенных волн в стратифицированной жидкости показывают существенное влияние диссипативных эффектов на скорость и амплитуду волн. Даже в экспериментах по эволюции симметричных уединенных волн второй моды, в которых устранено влияние трения о дно и влияние поверхностных эффектов, наличие высокоградиентных прослоек между однородными слоями и сдвига скорости в этих слоях приводит к существенному изменению амплитуды и скорости волны на характерных масштабах эксперимента [12]. Поэтому возникает вопрос о возможности моделирования диссипативных эффектов в (6) при помощи правой части f^\pm указанного вида. С целью верификации (6) в [12] была проведена серия экспериментов по затуханию симметричных уединенных волн второй моды над ровным дном (рис. 1, а, $z(x) \equiv 0$). Видеосъемка процесса распространения уединенной волны по промежуточному слою заданной толщины 2δ производилась со скоростью 25 кадров в секунду. В результате обработки изображений найдена зависимость амплитуды волны и ее скорости от пройденного расстояния и от времени. На рис. 6, а точками изображено положение гребня волны через равные промежутки

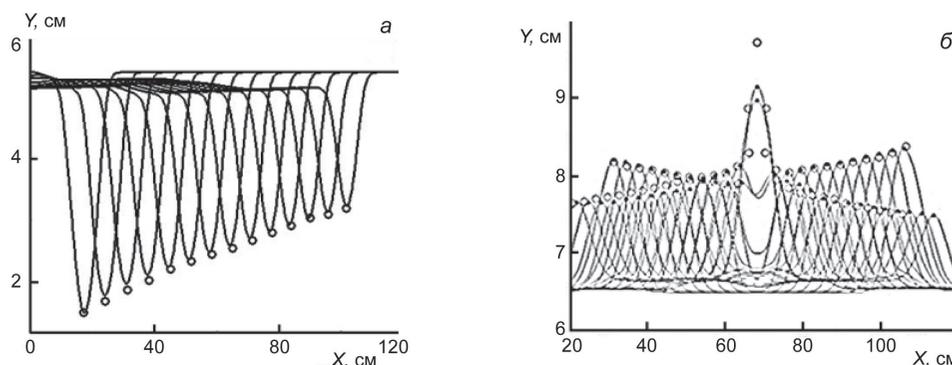


Рис. 6. Затухание уединенных волн.

а — одна волна, распространяющаяся слева направо, интервал времени 4 с [12]; б — взаимодействие двух уединенных волн, движущихся навстречу друг другу, интервал времени 2 с [11]. Точки — положение гребней волн в эксперименте. Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1).

времени $\Delta t = 4$ с ($\delta = 0.6$ см), а тонкими сплошными линиями — соответствующий профиль нижней половины волны, рассчитанной по модели (6). Аналогично, на рис. 6, б с интервалом $\Delta t = 2$ с представлены профили уединенных волн, движущихся навстречу друг другу. Как отмечалось выше, трение о дно не влияет существенно на распространение уединенной волны, поэтому $c_w = 0$. В представленном эксперименте и в экспериментах с другими значениями δ величина $c_i = 0.01$ дает хорошее совпадение с экспериментальными данными как по скорости, так и по амплитуде волны по мере ее распространения и затухания. Здесь важно отметить еще одну особенность эволюции уединенных волн, отчетливо наблюдаемую в численном эксперименте (рис. 6). Влияние трения приводит не только к потере энергии уединенной волны. Профиль волны становится все более несимметричным относительно ее гребня, и волна теряет не только скорость, но и массу. Заметим, что скорость потери массы уединенной волной (*shedding rate*) является важной характеристикой течений многофазных сред в трубах и каналах и, как правило, определяется только экспериментально.

Начальная толщина прослойки эффективно влияет на структуру прослоечных волн. В [12] проведен специальный эксперимент, демонстрирующий этот феномен. На пути симметричной уединенной волны в плоскости ее симметрии ставилась тонкая пластина (рис. 1, 2 в [12]). При прохождении возмущения через пластину течение приобретало форму гравитационного течения, в котором трение о дно играет определяющую роль. За пластиной опять восстанавливалась структура симметричной уединенной волны. При увеличении начальной толщины прослойки δ течение в окрестности пластины становилось все более симметричным относительно гребня волны и внешние границы волны уже соответствовали ее форме при распространении по прослойке. Эти эксперименты показывают, что структура прослоечных волн и придонных волн может существенно различаться в зависимости от того, имеется или нет перед волной тонкий слой более плотной жидкости. Как правило, современные модели распространения внутренних волн не учитывают это явление, что ограничивает их область применимости в зоне «заплеска» внутренних волн [19]. Заметим, что существенная перестройка уединенных волн, распространяющихся по тонкому слою более плотной жидкости, и переход к структуре гравитационного течения связаны с развитием сдвиговой неустойчивости (неустойчивости Кельвина—Гельмгольца) на фронте волны. Математическое описание такого перехода возможно только в рамках моделей, учитывающих совместные эффекты нелинейности, дисперсии и турбулентного перемешивания в стратифицированных течениях [23].

Уединенные волны в шельфовой зоне моря. Для стратифицированных течений больших масштабов, встречающихся в открытых водоемах, соотношение (6) позволяет представить структуру поверхностных и придонных волн, амплитуда которых может на порядок превосходить начальную толщину слоя, по которому эта волна распространяется. Конечно, в естественных условиях стратификация водоема может быть далека от двухслойной. Тем не менее, динамика уединенных волн определяется средним перепадом плотности в слоях. Поэтому двухслойная модель течения хорошо передает форму деформации основного пикноклина при прохождении уединенной волны. При этом, при заданной начальной толщине однородного слоя семейство уединенных волн, задаваемых (8), образует однопараметрическое семейство, определяемое числом Фруда $Fr = D / \sqrt{bH}$, где D — скорость волны, b — средняя плавучесть, H — полная глубина, так что скорость волны и ее профиль зависит только от выбора значения Fr ($0 \leq Fr \leq 0.5$).

Приповерхностные волны понижения генерируются в шельфовой зоне моря различными физическими механизмами (внутренний прилив, влияние топографии, распад вихрей и т. п.) [1]. Их амплитуда в южных морях может на порядок превосходить начальное заглубление верхнего однородного слоя и достигать 200—300 м. На рис. 7, а показана временная развертка поля температуры при прохождении одиночной волны через термисторную цепь (белые квадратики), установленную в шельфовой зоне Южно-Китайского моря [24, рис. 3, з]. Общая глубина в районе станции $H = 525$ м. Черной сплошной линией на рисунке показано положение основного пикноклина, соответствующего максимальному вертикальному отклонению изотерм при прохождении волны. Выше этого пикноклина температура меняется в пределах 25—30 °С, ниже — 5—25 °С. Рассматривая эту систему как двухслойную, определим среднюю плавучесть $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м/с². На рисунке белой

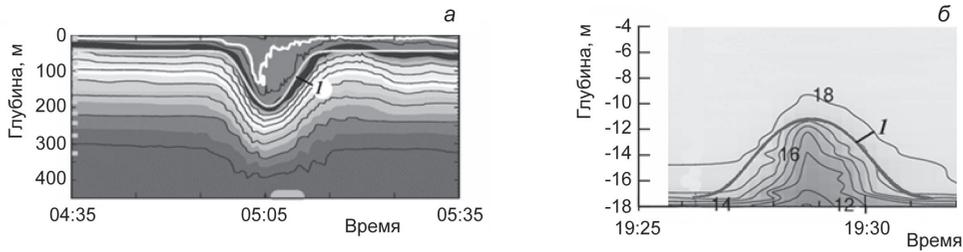


Рис. 7. Натурные наблюдения распределения температуры в уединенной волне.

а — приповерхностная волна [24] (черная сплошная линия — положение основного пикноклина), 04 июня 2011 г.; *б* — придонная уединенная волна [19], 09 сентября 2011 г. Цифры — температура в градусах Цельсия. *I* — решение (6).

сплошной линией (кривая *I*) обозначено решение (6) для значения числа Фруда $Fr = 0.48$, что соответствует скорости волны $D = Fr \sqrt{bH} = 2.2$ м/с, наблюдаемой в натурном эксперименте.

В прибрежной зоне волны понижения меняют полярность [25] и в зону «заплеска», т. е. выше линии контакта основного пикноклина со дном, выходят в виде серии придонных короткопериодных уединенных волн, захватывая в ядре более холодную воду и транспортируя ее к берегу вплоть до полного разрушения волны. Систематическое исследование волн в зоне «заплеска» приведено в [19]. При подходе к берегу возмущения поля плотности принимают вид уединенных волн повышения, амплитуда которых достигает половину полной глубины моря в данном районе, или, разрушаясь, принимают форму *N*-волны с передним крутым склоном и медленным спадом плотности за фронтом волны. Структура первого типа волн описывается решением (6), соответствующим волне повышения ($h_0 < h < h_m$). На рис. 7, *б* приведен фрагмент записи распределения температуры в придонном слое, полученный в [19, рис. 8, *а*] при помощи вертикальной термисторной цепи. Общая глубина в месте измерения $H = 18$ м, перед волной температура всего слоя за исключением тонкого придонного слоя равна 18°C . В «ядре» волны средняя температура составляла 12°C . На рис. 7, *б* сплошной линией (линия *I*) обозначено решение (6) для $h_0 = 0.9$ м, $b = 1.2 \cdot 10^{-2}$ м/с², $Fr = 0.49$.

Проведенные лабораторные исследования уединенных волн большой амплитуды, распространяющихся в прослойке (симметричные волны второй моды), а также в приповерхностных и придонных слоях (волн понижения и повышения первой моды) показали возможность применения модели (6) для расчета нестационарных волновых процессов, а также полученных из нее точных решений (8) и (11) для определения формы и основных параметров этих волн. Анализ решений (6) дает возможность установить основные закономерности трансформации уединенных волн и нелинейных волновых пакетов большой амплитуды в шельфовой зоне моря.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН (проект 18.6), а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 13-01-00249, 15-01-03942).

Литература

1. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395—425.
2. Scotti A., Pineda J. Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L22307. P. 1—5.
3. Stevens C. L., Fisher T. S. R., Lawrence G. A. Turbulent layering beneath the pycnocline in a strongly stratified pit lake // *Limnol. Oceanogr.* 2005. V. 50, N. 1. P. 197—206.
4. Davis R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 593—608.
5. Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixing regions in two and three dimensions // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. P. 47—64.
6. Tung K.-K., Chan T. F., Kubota T. Large amplitude internal waves of permanent form // *Studies Appl. Math.* 1982. V. 66. P. 1—44.
7. Kao T. W., Pao K. H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. P. 115—127.
8. Stamp A. P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 305. P. 347—371.
9. Derzho O. G., Grimshaw R. Asymmetric internal solitary waves with a trapped core in deep fluids // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. 096601.
10. Lamb K. G. Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 478. P. 81—100.

11. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю. Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей // ДАН. 2009. Т. 429, № 2. С. 187—190.
12. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю. Уединенные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 26—38.
13. Gavrilov N. V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Large amplitude internal solitary waves over a shelf // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2011. V. 11. P. 17—25.
14. Gavrilov N. V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Mass and momentum transfer by solitary internal waves in a shelf zone // Nonlinear Processes Geoph. 2012. V. 19. P. 265—272.
15. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А. Влияние дисперсии на распространение внутренних волн в шельфовой зоне // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 25—34.
16. Данилова К. Н., Ляпидевский В. Ю. Уединенные волны в двухслойной, мелкой воде // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 22—31.
17. Навроцкий В. В., Ляпидевский В. Ю., Павлова Е. П., Храпченков Ф. Ф. Внутренние волны и перемешивание в шельфовой зоне моря // Известия ТИНРО. 2010. Т. 162, № 3. С. 324—337.
18. Навроцкий В. В., Ляпидевский В. Ю., Павлова Е. П. Внутренние волны и их биологические эффекты в шельфовой зоне моря // Вестник ДВО РАН. 2012. № 6. С. 22—31.
19. Кукарин В. Ф., Ляпидевский В. Ю., Навроцкий В. В., Храпченков Ф. Ф. Эволюция внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 35—45.
20. Choi W. Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves // Proceedings of the Fourth International Conference on Hydrodynamics / Eds: Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki. 2000. P. 453—458.
21. Barros R., Gavriluk S. Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. Part II. Large Amplitude Solitary Waves Embedded into the Continuous Spectrum // Studies in Appl. Math. 2007. V. 119, Issue 3. P. 213—251.
22. Le Metayer O., Gavriluk S., Hank S. A numerical scheme for the Green-Naghdi model // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2034—2045.
23. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: ИСО РАН, 2000. 420 с.
24. Lien R.-Ch., Henevey F., Ma B., Yang Y. J. Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetic // J. Phys. Oceanography. 2014. V. 44, N. 4. P. 1095—1115.
25. Серебряный А. Н., Пао К. П. Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // ДАН. 2008. Т. 420, № 4. С. 543—547.

Статья поступила в редакцию 15.04.2015 г.

УДК 551.465

© В. С. Мадерич, Е. В. Терлецкая, И. А. Бровченко

Институт проблем математических машин и систем Национальной академии наук Украины
vladmad@gmail.com

Фронтальное столкновение внутренних волн большой амплитуды

Численно исследуются динамика и энергетика фронтального столкновения уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Расчеты проводятся в рамках уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска. Показано, что в результате столкновения уединенных внутренних волн умеренных амплитуд возникает малый фазовый сдвиг и за прошедшими волнами генерируются дисперсионные цуги волн. Фазовый сдвиг растет с увеличением амплитуд взаимодействующих волн и при больших амплитудах приближается к предельному значению. При фронтальном столкновении волн больших амплитуд отклонение максимальной высоты от удвоенной амплитуды набегающих волн не увеличивается с их ростом, в отличие от волн умеренной амплитуды. Показано, что взаимодействие волн большой амплитуды приводит к сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина—Гельмгольца в слое раздела, однако затем волны снова становятся устойчивыми.

Ключевые слова: внутренние волны большой амплитуды, численное моделирование, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца.

V. S. Maderich, K. V. Terletska, I. A. Brovchenko

The Institute of Mathematical Machines and Systems Problems of the Ukraine National Academy of Science (IMMSP NASU)
vladmad@gmail.com

Head-on Collision of Internal Waves of Large Amplitudes

The dynamics and energetics of a frontal collision of internal solitary waves of high amplitude propagating in a two-layer stratified fluid are studied numerically. The computations are carried out within the framework of the Navier—Stokes equations in the Boussinesq approximation. It was shown that the frontal collision of internal solitary waves of moderate amplitude leads to a small phase shift and to the generation of dispersive wavetrain trailing behind transmitted solitary wave. The phase shift grows with increasing amplitudes of the interacting waves and approaches the limiting value at large amplitudes of the waves. The deviation of the maximum wave height during collision from the twice the amplitude does not grow with increasing amplitude in the case of interaction of wave of large amplitude in contrast to the moderate amplitude waves. It was shown that the interaction of waves of large amplitude leads to the shear instability and the formation of Kelvin—Helmholtz vortices in the interface layer, however, subsequently waves again become stable.

Key words: internal waves of large amplitude, numerical modelling, Kelvin—Helmholtz instability.

Распространение внутренних гравитационных волн в океане сопровождается их взаимодействием с рельефом дна, течениями, неоднородностями стратификации, и также взаимодействием с поверхностными и внутренними волнами [1, 2]. Наблюдения в океане и теоретические исследования показывают, что процессы взаимодействия между внутренними волнами, распространяющимися под различными относительными углами, достаточно многообразны и сложны [3, 4].

Фронтальное столкновение уединенных внутренних волн малой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией и описывающихся решениями уравнений Кортевега—де Вриза (КДВ) и Гарднера изучалось в работах [5, 6], где решения были найдены методом возмущений, основанном на разложении до третьего порядка по малому параметру пропорциональному

амплитуде волны. В этих работах были получены оценки максимальной амплитуды и фазового сдвига при взаимодействии волн. Численное решение задачи в рамках уравнений Буссинеска для взаимодействующих волн малой амплитуды дано в [7]. Однако процессы взаимодействия волн большой амплитуды, часто наблюдаемых в прибрежных областях океана, могут существенно отличаться от описанных ранее [8], сопровождаясь, например, неустойчивостью взаимодействующих волн и последующим перемешиванием, что делает необходимым для их исследования использование полной системы уравнений гидродинамики стратифицированной жидкости. В настоящей работе в рамках уравнений Навье—Стокса рассматривается фронтальное столкновение уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двумя однородными слоями, разделенными тонкой прослойкой.

Постановка задачи. Схема численных экспериментов приведена на рис. 1. Две внутренних уединенных волны движутся по направлению друг к другу в численном лотке лабораторного масштаба, заполненного стратифицированной по солености водой. Используется приближение Буссинеска, когда разница в плотности между верхним и нижним слоями $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ предполагается малой по сравнению с невозмущенной плотностью ρ_0 . Расчеты проводились в рамках уравнений Навье—Стокса для стратифицированной среды. Система уравнений неразрывности, движения и переноса соли имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \rho}{\rho_0}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} &= \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $U_i = (U, V, W)$ — составляющие поля скорости; P — давление; ρ — плотность воды; S — соленость; $g_i = (0, 0, g)$ — ускорение силы тяжести; $\nu = 10^{-6}$ м²/с — кинематическая вязкость; $\chi = 10^{-9}$ м²/с — молекулярная диффузия. Система уравнений (1) дополнена эмпирическим уравнением состояния $\rho = \rho(S, T)$, где T — температура, полагаемая постоянной [9]. Граничные условия на поверхности $z = \eta(x, y, t)$ включают кинематическое условие для поверхности:

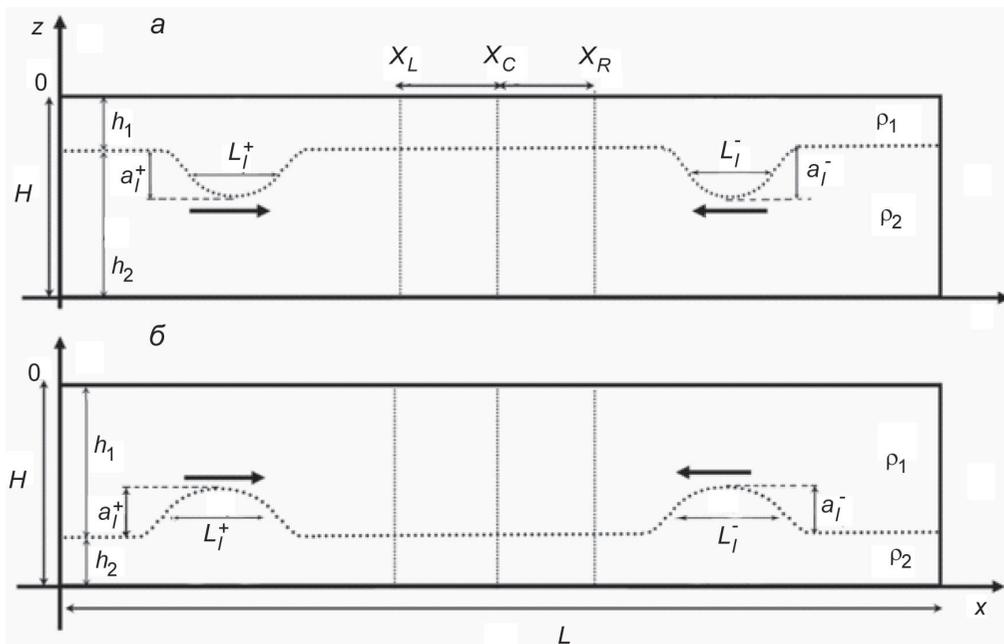


Рис. 1. Схема модельной области для волн понижения (а) и для волн повышения (б).

$$W = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2)$$

а также условия отсутствия касательных напряжений трения и потоков соли на всех границах численного лотка. Граничное условие (2) совместно с условием непротекания на дне используются для интегрирования по глубине уравнения неразрывности, которое служит для вычисления возвышений уровня η .

Система уравнений модели дискретизировалась с использованием метода конечных разностей на смещенной сетке. Решение задачи расщеплялось на две подзадачи: а) — решение двумерной системы уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей и б) — решение трехмерной задачи для скорости и давления. Поле скорости и давления в трехмерной подзадаче расщеплялось на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Алгоритм решения детально описан в [10].

Вычислительный лоток имел длину L и глубину H . Задача решалась в квазидвухмерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бассейна при условии скольжения на боковых стенках бассейна. Разрешение сетки по длине и высоте представлено в таблице. Невозмущенная стратификация в лотке моделировалась в виде поверхностного и придонного слоев с толщинами h_1 и h_2 , где глубина $H = h_1 + h_2$ с соленостью $S_{up} = 0$ и $S_{bot} = 30$ при постоянной температуре 20° , что соответствует плотностям слоев $\rho_{up} = 998.204 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ и $\rho_{bot} = 1020.95 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$. Эти однородные слои разделены тонким переходным слоем толщины dh . Профиль солёности аппроксимировался формулой

$$S(z) = \frac{S_{up} + S_{bot}}{2} - \frac{S_{bot} - S_{up}}{2} \text{th} \left(\frac{z - h_1}{dh} \right), \quad (3)$$

где толщина халоклина $dh = 0.5$ см для всех экспериментов. В качестве поверхности раздела в расчетах визуализировалась изохалина равная 15, которая соответствует изопикне $\rho = 1009.57 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$.

Для генерации уединенных волн большой амплитуды при численном моделировании по аналогии с лабораторными экспериментами [11] используется механизм коллапса, когда в вычислительном бассейне выделяется часть объема, заполненная водой солёности S_{up} в случае, когда $h_1 < h_2$, и S_{bot} , когда $h_1 > h_2$. Для того чтобы сформировать уединенную волну понижения, начальная толщина верхнего слоя в выделенном объеме должна быть больше, чем в остальном бассейне. В противоположном случае генерируются волны повышения. После того как головная волна трансформировалась в уединенную волну, осциллирующий мелкомасштабный хвост отрезался. Характеристики волн оценивались в сечениях $X_L = X_R = 2.5$ м от центра лотка X_C . Амплитуды волн, распространяющихся слева направо в сечениях X_L и X_R , определяются как a_l^+ , a_r^+ , а справа налево — как a_l^- , a_r^- , соответственно.

Результаты моделирования представлены в безразмерном виде. Горизонтальные и вертикальные координаты x и z нормированы на глубину верхнего слоя h_1 , тогда как скорость нормирована на фазовую скорость линейных волн $c_0 = (gh_1 h_2 \Delta \rho \rho_0^{-1} H^{-1})^{1/2}$, а время $\tau = t / \sqrt{\rho_0 h_1 / \Delta \rho g}$. Важными характеристическими безразмерными параметрами волны являются безразмерная амплитуда $\alpha = |\alpha^\pm| / h_1$ и отношение вертикального к горизонтальному масштабу волн $\varepsilon = h_1 / \lambda$, где λ — характерная длина волны. Баланс между нелинейностью и дисперсией во внутренних волнах зависит от отношения слоев стратифицированной жидкости $\gamma = h_2 / h_1$. Для заданного γ параметры α и ε в уединенных волнах не являются независимыми.

Были проведены четыре серии численных экспериментов для различных отношений параметра γ : для волн понижения $\gamma = 0.25; 0.125$ и для волн повышения $\gamma = 4; 8$. Значения длины L и глубины H численного лотка, разрешения сетки для всех четырех серий численных экспериментов, характеристики набегающих волн α и ε даны в таблице. В численных экспериментах серий 1 и 3 воспроизводятся лабораторные эксперименты [12] для случаев одинаковых и разных амплитуд сталкивающихся волн для значений $\gamma = 0.25$ и 4. Серии 2 и 4 представлены для отношений $\gamma = 0.125$ и 8. Численный эксперимент 2а был проведен как повторение эксперимента серии 2 с амплитудой $\alpha = 2.2$ при более детальной численной сетке.

Параметры расчетов

Номер серии	L , м	H , м	$\gamma = h_1/h_2$	α	ε	Разрешение
1	12	0.5	0.25	0.12—1.2	0.05—1.1	3000 × 300
2	12	0.5	0.125	0.2—2.8	0.1—1.5	3000 × 300
2a	12	0.5	0.125	2.2	1	5000 × 500
3	12	0.5	4	0.12—1.2	0.05—1.1	3000 × 300
4	12	0.5	8	0.2—2.7	0.08—1	3000 × 300

Взаимодействие волн умеренной амплитуды. Как показано в [5, 6] внутренние волны малых амплитуд взаимодействуют неэластично. В результате столкновения солитонов Кортевега—де Вриза (КдВ) [5] и Гарднера [6] возникает некоторый фазовый сдвиг, а за разбегающимися волнами возникают осциллирующие хвосты. Рассмотрим случай из серии 1, когда две волны умеренных равных амплитуд $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$, движутся навстречу друг другу. Этот расчет соответствует лабораторному эксперименту, описанному в статье [12]. Профиль набегающей волны с амплитудой a_r^- в сечении X_R , соответствующий экспериментальный профиль и аналитический профиль солитона КдВ представлены на рис. 2, а, а соответствующий профиль прошедшей волны с амплитудой a_r^+ в сечении X_R показан на рис. 2, б.

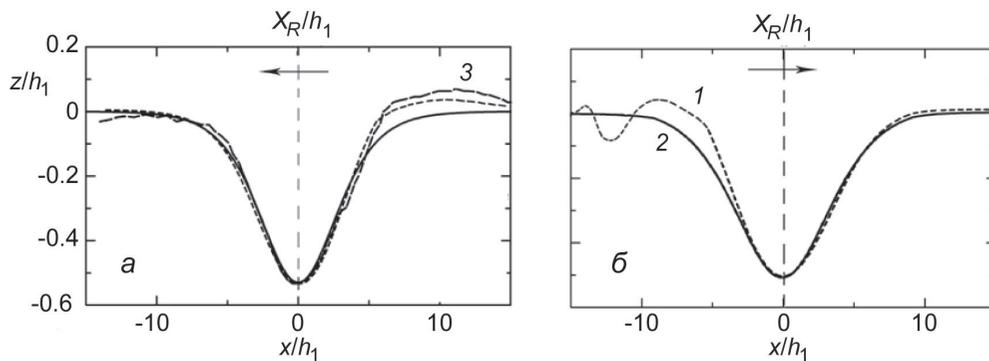


Рис. 2. Профили набегающей и прошедшей волн в сечениях X_R для случая $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$. 1 – моделирование; 2 – решение КдВ; 3 – (Hsu, Chaeng 2013).

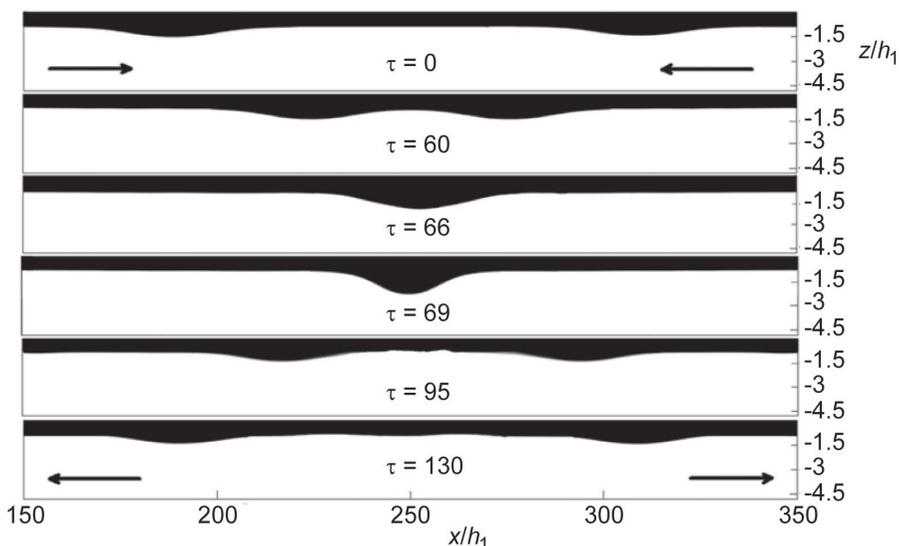


Рис. 3. Трансформация уединенных волн в результате столкновения при $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$.

Трансформация этих уединенных волн при их столкновении приведена на рис. 3, где показано поле солености вдоль бассейна. В момент столкновения взаимодействующие волны образуют единый пик, высота которого на 8 % выше, чем сумма двух высот волн. После столкновения расходящиеся волны почти восстанавливают свою первоначальную форму, однако наблюдаются как небольшой фазовый сдвиг, так и формирование дисперсионного хвоста.

Расчеты показали, что минимальное значение числа Ричардсона

$$Ri_{\min} = \frac{\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (4)$$

для волны с амплитудой a_r^- в сечении X_R равно 0.3, а после столкновении волн оно падает, также для волны с амплитудой a_l^- в сечении X_L $Ri_{\min} = 0.23$. Значения минимального числа Ричардсона (4) в волнах несколько меньше, чем критическое значение 0.25 для параллельных стратифицированных потоков [13], но волны в процессе взаимодействия остаются устойчивыми.

Взаимодействие волн большой амплитуды. Взаимодействие сильно нелинейных уединенных волн моделировалось в серии 2 и 2a при $\gamma = 0.125$ и $\alpha = 2.2$. В этом случае абсолютная величина амплитуды волн в начальный момент времени больше, чем предельная амплитуда солитона Гарднера [1], но меньше, чем предельная амплитуда солитона Мияты—Чоя—Камассы (МЧК) [14, 15] в приближении Буссинеска $a_{\text{lim}} = (h_1 - h_2)/2$. Как видно на рис. 4, уединенная волна большой амплитуды до и после столкновения хорошо аппроксимируется решением МЧК [14, 15]. В отличие от профиля волны с параметрами $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$ на рис. 2, а, исчезла асимметрия фронтов, что произошло из-за укорочения характерной дистанции нелинейности и более быстрого восстановления солитонного профиля после взаимодействия. В начальном сечении X_R минимальное число Ричардсона в устойчивой уединенной волне с амплитудой a_l^- $Ri_{\min} = 0.15$ (для расчетов серии 2) и $Ri_{\min} = 0.146$ (для расчетов серии 2a), что меньше значения критического значения 0.25. Но неоднородность потока в уединенных волнах может привести к тому, что необходимое условие $Ri_{\min} < 0.25$ не будет достаточным для возникновения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца (КГ). Так, согласно оценкам для неустойчивых внутренних волн, минимальными значениями Ri , при которых начинается неустойчивость КГ внутренних волн, являются $Ri < 0.075 \pm 0.035$ и $Ri < 0.092 \pm 0.016$ для лабораторных экспериментов [16] и [17], соответственно, тогда как условия $Ri < 0.10$ и $Ri < 0.13$ выполняются для численных экспериментов с нелинейными волнами [18] и [19], соответственно.

Кроме того, из-за нелокальности процесса развития неустойчивости КГ в волнах, использование только числа Ричардсона в качестве критерия неустойчивости может быть недостаточным. Полезной характеристикой состояния потока является длина потенциально неустойчивой области L_x , в которой $Ri_{\min} < 0.25$, характеризующая горизонтальную протяженность области, в которой может развиваться неустойчивость. Эмпирическое соотношение $L_x/\lambda_{0,5} = 0.86$, полученное в [17], отделяет

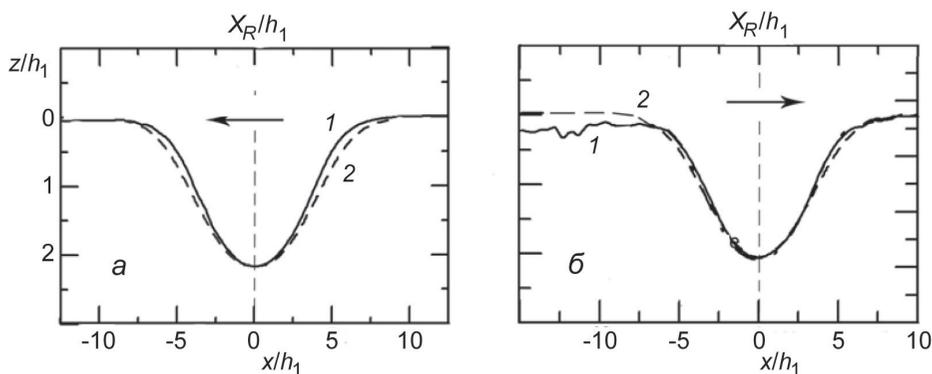


Рис. 4. Профили волн в сечении X_R до (а) и после (б) столкновения для случая $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$. 1 – моделирование; 2 – решение МЧК.

устойчивые волны $L_x/\lambda_{0,5} < 0.86$ от потенциально неустойчивых. Здесь $\lambda_{0,5}$ — длина волны на половине модуля амплитуды волны. Для данного эксперимента в сечении X_L отношение $L_x/\lambda_{0,5} = 0.82$ (серия 2) и $L_x/\lambda_{0,5} = 0.85$ (серия 2a), и волны до столкновения также характеризуются как устойчивые. На рис. 5 приведено распределение солености вдоль вычислительного бассейна в процессе взаимодействия волн. Как следует из рисунка, при взаимодействии волн большой амплитуды возникает сдвиговая неустойчивость при расхождении волн $\tau = 70$, в результате которой формируются вихри Кельвина—Гельмгольца и происходит перемешивание. Детально этот процесс показан на рис. 6, где представлены поля скорости и контуры потенциально неустойчивых областей, в которых $Ri < 0.25$. При схождении волн $\tau = 35$ потенциально неустойчивые области расположены вблизи максимального отклонения поверхности раздела, затем, при схождении волн, области максимального сдвига сдвигаются в тыльные части волн $\tau = 50$. В отличие от поверхностных волн, заплеска с формированием струи [20, 21] не происходит, так как из-за малой разности плотности оба слоя динамически активны при наличии стабилизирующего действия трения. Расчеты показали, что неустойчивость начинается при расхождении взаимодействующих волн, когда длина потенциально неустойчивых областей L_x нарастает от 0 при $\tau = 54$ до $L_x/\lambda_{0,5} = 0.86$, что соответствует условию неустойчивости нелинейных внутренних волн. Число Ричардсона при этом уменьшается до значения 0.07. В дальнейшем L_x падает, и волна вновь становится устойчивой. В сечении X_R волна, движущаяся направо, устойчива и характеризуется минимальным числом Ричардсона $Ri_{\min} = 0.121$ ($Ri_{\min} = 0.117$ серия 2a). При этом $L_x/\lambda_{0,5} = 0.81$.

Сравнивая результаты расчетов с разным разрешением (серии 2 и 2a), можно сделать вывод, что количественные характеристики в зависимости от разрешения изменяются слабо: Ri_{\min} — в пределах

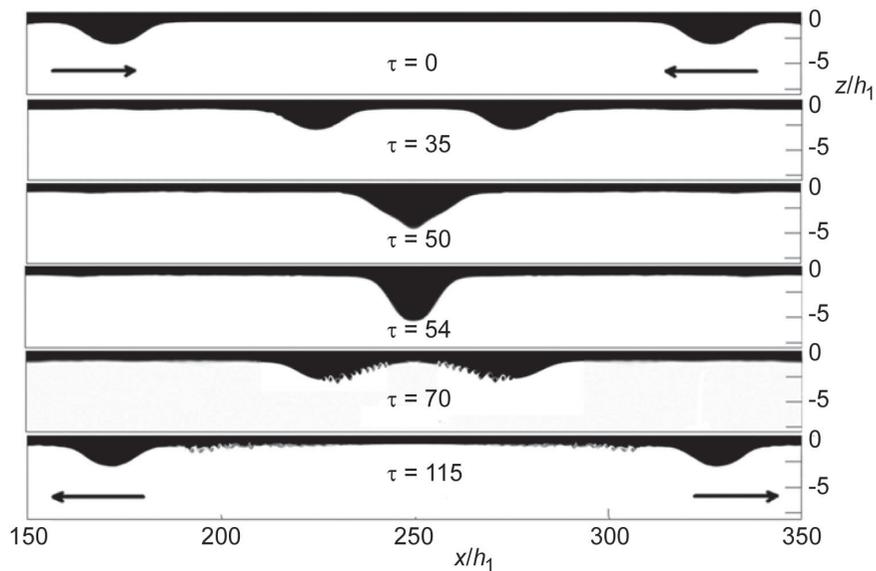


Рис. 5. Трансформация уединенных волн для случая $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$ (серия 2a).

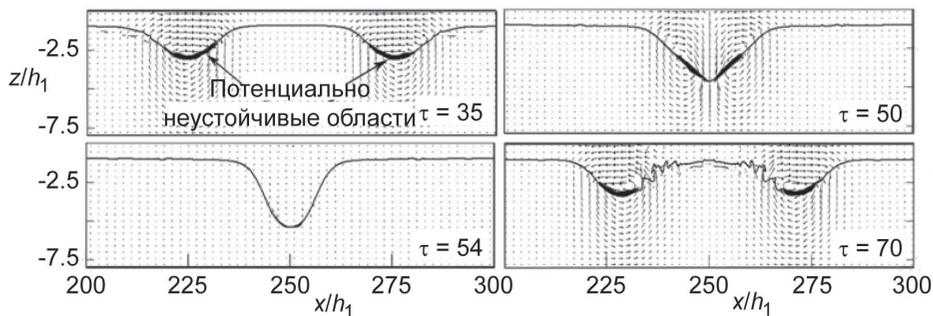


Рис. 6. Поле скорости и положение неустойчивых областей ($Ri < 0.25$) при взаимодействии уединенных волн при $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$.

3 %, а длина, характеризующая горизонтальную протяженность области, в которой может развиваться неустойчивость, — в пределах 4 %. Разрешение численной области, принятое для расчетов в сериях 1—4, достаточно для воспроизведения таких мелкомасштабных деталей, как вихри Кельвина—Гельмгольца.

Сравнение результатов моделирования с результатами лабораторных экспериментов и теоретическими зависимостями. Были проведены оценки потери амплитуд при столкновении и проведено сравнение результатов численных и лабораторных экспериментов [12]. Как и в работе [12], мы рассматриваем безразмерную характеристику амплитуды A_S , которая равна отношению амплитуды в одном из сечений X_L и X_R волны к сумме амплитуд сталкивающихся волн, следовательно, если волны одинаковых амплитуд, то $A_S=0.5$:

$$A^+_S = \frac{a^+_l}{a^+_l + a^-_r}, \quad A^-_S = \frac{a^-_r}{a^+_l + a^-_r}. \quad (5)$$

Зависимости от параметра A_S (5) амплитуд волны в момент столкновения волн A_{\max} и после взаимодействия A_T , нормированных на амплитуду волны до столкновения, и соответствующие зависимости для длин волн L_{\max} и L_T представлены на рис. 7.

Как видно из рис. 7, после столкновения двух уединенных внутренних волн, амплитуда A_T принимает значения, близкие к 1. В момент столкновения максимальная амплитуда немного больше (на 2—9 %), чем сумма набегающих волн. В численных экспериментах характерная длина волны также полностью восстанавливается после столкновения, как для волн повышения, так и волн понижения. В лабораторном эксперименте, однако, наблюдается увеличение длин волн повышения после взаимодействия, что связано с донным трением. В целом, результаты расчетов согласуются с результатами лабораторных экспериментов [12].

Рассчитанные в рамках полных уравнений Навье—Стокса высоты максимального пика волны и фазового сдвига после столкновения для случая одинаковых амплитуд были сравнены с аналитическими оценками [5]. Для одинаковых уединенных волн малой амплитуды в приближении слабонелинейной теории безразмерная максимальная амплитуда при их взаимодействии равна [5]:

$$A_C = 2\alpha + \lambda_1 \alpha^2 + 4\lambda_1^2 \alpha^3 \left(\frac{3}{4} + \Omega_1 \left(U + \frac{5}{4} R_2 D_2 \right) \right), \quad (6)$$

где $\lambda_1 = 0.5D_2 / D_1$, $D_1 = 1 + \sigma / \gamma$, $D_2 = 1 - \sigma / \gamma^2$, $R_2 = \gamma(\gamma + 1)$, $\sigma = \rho_1 / \rho_2$, $\gamma = -h_1 / h_2$, $U = 1 - \sigma\gamma$, $\Omega_1 = \sigma R_1 / (\gamma U^2 D_2^2)$ где $R_1 = 1 - 1/\gamma$.

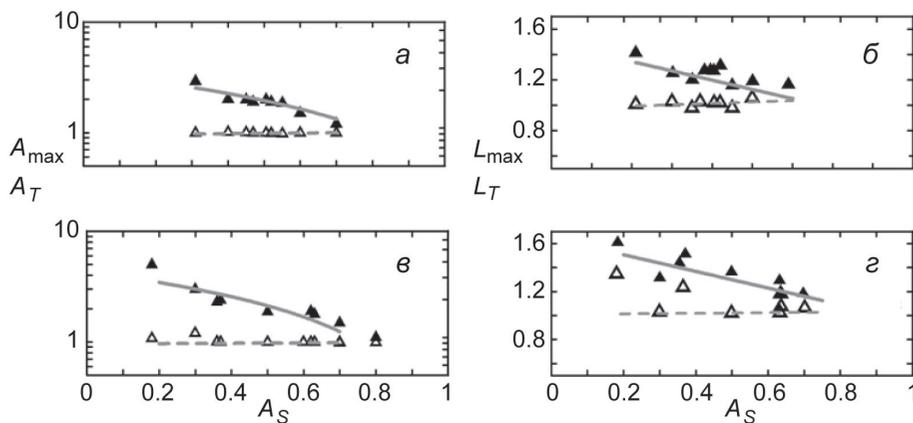


Рис. 7. Сравнение характерных амплитуд A_T , A_{\max} и длин L_T , L_{\max} , полученных путем численного моделирования, с результатами лабораторных экспериментов [12] для волн понижения (а, б) и для волн повышения (в, г).
Линия - A_{\max} , L_{\max} ; пунктир - A_T , L_T ; треугольники - [12].

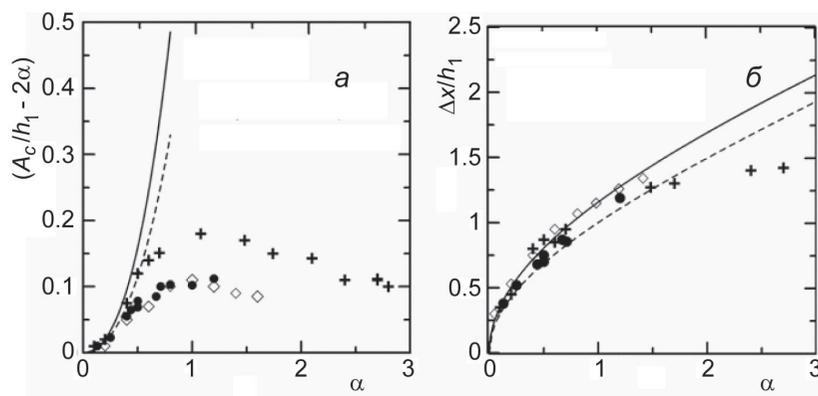


Рис. 8. Зависимость отклонения нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн от нормированной амплитуды волн (а).

Зависимость фазового сдвига от нормированной амплитуды (б).

Линия – $\gamma = 0.125$ [5]; пунктир – $\gamma = 0.25$ [5]; кружки – $\gamma = 0.25$ моделирование; крестики – $\gamma = 0.125$ моделирование; ромбы – $\gamma = 0.21$, моделирование [8].

Соответствующий фазовый сдвиг при взаимодействии находится в виде:

$$\tilde{x} = 2|\lambda_1| h_1 \left(\frac{U\alpha}{3D_2} \right)^{1/2} \left(1 + 2\lambda_1 \alpha \left(\frac{7}{8} + \Omega_1 \left(\frac{1}{8} R_2^2 D_2^2 + \frac{2}{3} R_2 D_2 U + \frac{1}{2} U^2 \right) \right) \right). \quad (7)$$

Сравнение теоретических оценок (6)—(7) и результатов численных экспериментов для случаев $\gamma = 0.125$, $\gamma = 0.25$, а также результатов численных экспериментов [8] при $\gamma = 0.21$ показано на рис. 8. Фазовый сдвиг и отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн согласуются при $\alpha < 0.3$ с оценками полученными в рамках слабонелинейной теории [5]. Однако для волн умеренной и большой амплитуды фазовый сдвиг и максимальная амплитуда при взаимодействии существенно отличаются от предсказаний слабонелинейной теории. В частности, отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн не увеличивается с амплитудой, а фазовый сдвиг приближается к некоторому предельному значению $\Delta x/h_1 = 1.42$.

В рамках уравнений Навье—Стокса численно исследована динамика фронтального взаимодействия уединенных внутренних волн как понижения, так и повышения, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Взаимодействие внутренних уединенных волн умеренных амплитуд приводит к возникновению малого фазового сдвига и появлению осциллирующих хвостов, при этом максимальная амплитуда при взаимодействии таких волн больше, чем их сумма. Фазовый сдвиг и отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн согласуются при $\alpha < 0.3$ с оценками, полученными в рамках слабонелинейной теории [5]. Однако для волн умеренной и большой амплитуды фазовый сдвиг и максимальная амплитуда при взаимодействии существенно отличаются от предсказаний слабонелинейной теории. При больших амплитудах волн отклонение нормированной максимальной амплитуды при их взаимодействии от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн не увеличивается с амплитудой, а фазовый сдвиг приближается к некоторому предельному значению. Взаимодействие устойчивых внутренних волн достаточно большой амплитуды приводит к возникновению сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина—Гельмгольца в слое раздела, однако, затем волны снова становятся устойчивыми.

Литература

1. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Modeling internal solitary waves in the coastal ocean // Survey in Geophysics. 2007. № 28. P. 273—298.
2. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // Ann. Review Fluid Mech. 2006. № 38. P. 395—425.

3. *Grimshaw R., Zhu Y.* Oblique interactions between internal solitary waves // *Stud. Appl. Math.* 1994. № 92. P. 249—270.
4. *Wang C., Pawlowicz R.* Oblique wave-wave interactions of nonlinear near-surface internal waves in the Strait of Georgia // *J. Geophys. Res.* 2012. № 117. C06031.
5. *Mirie R., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. Part 1 // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 147. P. 213—231.
6. *Mirie R. M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. II // *Phys. Fluids.* 1986. № 29. P. 31—37.
7. *Nguyen H. Y., Dias F.* A Boussinesq system for two-way propagation of interfacial waves // *Physica D.* 2008. № 237. P. 2365 — 2389.
8. *Jo T.-C., Choi W.* On stabilizing the strongly nonlinear internal wave model // *Stud. Appl. Math.* 2008. № 120. P. 65—85.
9. *Mellor G. L.* An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // *J Atmos. Ocean. Tech.* 1991. № 8. P. 609—611.
10. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.* 2003. № 53. P. 176—185.
11. *Kao T. W., Pan F. S., Renouard D.* Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope // *J. Fluid Mech.* 1985. № 159. C. 19—53.
12. *Hsu R.-C., M. H. Cheng, Chen C.-Y.* Potential hazards and dynamical analysis of interfacial solitary wave interactions // *Nat Hazards.* 2013. 65:255–278 DOI 0.1007/s11069-012-0360-9.
13. *Miles J. W., Howard L. N.* Note on a heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* 1964. № 20. P. 331—336.
14. *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer.* 1985. № 23. P. 43—48.
15. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. № 396. P. 1—36.
16. *Troy C. D., Koseff J. R.* The instability and breaking of long internal waves // *J. Fluid Mech.* 2005. №. 543. P. 107—336.
17. *Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A.* Shear-induced breaking of large internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 2006. № 620. P. 1—29.
18. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B. H.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step // *Physics of Fluids.* 2010. № 22. doi:10.1063/1.3455984.
19. *Barad M. F., Fringer O. B.* Simulations of shear instabilities in interfacial gravity waves // *J. Fluid Mech.* 2010. № 644. P. 61—95.
20. *Maxworthy T.* Experiments on collisions between solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1976. № 76. P. 177—185.
21. *Chambarel J., Kharif C., Touboul J.* Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation // *Nonlinear Proc. Geoph.* 2009. № 16. P. 111—122.

Статья поступила 24.04.2015 г.

УДК 551.466

© *Е. А. Рувинская, О. Е. Куркина, А. А. Куркин, А. А. Наумов*Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород
moonlights87@mail.ru

Перенос частиц при распространении бризеров внутренних гравитационных волн

Для жидкости с квазитрехслойной стратификацией плотности исследованы особенности переноса жидких частиц при распространении длинных нелинейных локализованных волновых пакетов (бризеров) в рамках слабонелинейной теории. Для описания смещений в максимуме вертикальной бароклинной моды использовалось уравнение Гарднера. Для определения полей смещений, вертикальных и горизонтальных скоростей, необходимых для нахождения Лагранжевых траекторий частиц, использовались три варианта вертикальной структуры волновых полей: линейная мода, слабонелинейное приближение (с учетом первой нелинейной поправки к линейной моде) и слабонелинейное слабодисперсионное приближение (учитывались как первая нелинейная, так и первая дисперсионная поправки). Поскольку поля скоростей, индуцированные нелинейным волновым пакетом, мгновенно изменяются, исследовались процессы переноса частиц для разных начальных конфигураций бризеров. Проведено сравнение формы траекторий частиц для разных горизонтов и разных конфигураций бризеров. Показано, что использование слабонелинейной модели достаточно для определения траекторий жидких частиц, поскольку учет первой дисперсионной поправки к модовой функции почти не влияет на качественные и количественные характеристики смещения частиц. Выявлено существенное отличие решения задачи о траекториях жидких частиц для двух типов нелинейных волновых движений в стратифицированной жидкости — солитонов и бризеров.

Ключевые слова: внутренние волны, перенос частиц, бризеры, численное моделирование.

*E. A. Ruvinskaya, O. E. Kurkina, A. A. Kurkin, A. A. Naumov*Nizhny Novgorod State Technical University
moonlights87@mail.ru

Transport of Particles at the Propagation of Breathers of Internal Gravity Waves

The distinctive features of particle transport during the propagation of long nonlinear localized wave packets (breathers) in quasi three-layer fluid are investigated in the framework of weakly nonlinear theory. To describe the displacement at the maximum of vertical baroclinic mode the Gardner equation is used. To determine the fields of displacements, vertical and horizontal velocities, which are used for finding of Lagrangian particle trajectories, three variants of the wave fields' vertical structure are used: linear mode, weakly nonlinear approximation (with taking into account the first nonlinear amendment to linear mode) and weakly nonlinear weakly dispersive approximation (with taking into account both the first nonlinear amendment and the first dispersive amendment to linear mode). Since the velocity fields induced by nonlinear wave packets change immediately, the processes of particle transport are investigated for different initial configurations of breathers. The comparison of the form of particle trajectories for different horizons and different breathers' configurations is made. It is shown that the use of the weakly nonlinear model is sufficient to determine the trajectories of fluid particles. Taking into account the first dispersive amendment to the modal function almost does not affect the quality and quantity of particles' displacements. A significant difference between solutions of the problem of fluid particles' trajectories for two types of nonlinear wave motions in a stratified fluid — solitons and breathers — is revealed.

Key words: internal wave, particle transport, breathers, numerical simulation.

Существует значительное количество работ, в которых исследовано воздействие интенсивных внутренних волн на процессы, происходящие в природных акваториях: горизонтальный и вертикальный обмен, перераспределение потоков тепла, импульса, перемешивание вод, формирование рельефа дна и др. [1—7]. Доказано, что такие волны могут создавать значительные нагрузки и изгибающие моменты на подводные части гидротехнических сооружений [8—11], а также способствуют ресуспендированию осадков и переносу наносов [7, 12, 13]. В последнее время процессы переноса частиц посредством индуцированных внутренними волнами потоков активно исследуются в рамках различных прикладных направлений, связанных с гидробиологией (миграция планктона, бентоса), экологией (распространение примесей и загрязнений) и инженерной океанологией.

Нелинейные волновые движения в стратифицированных потоках характеризуются большим разнообразием режимов и форм. Отдельного внимания в этом контексте заслуживают локализованные возмущения, которые в слабонелинейном пределе описываются фундаментальными неизлучающими решениями: солитонами и бризерами соответствующих упрощенных моделей — эволюционных уравнений. Зависимость расстояния переноса частиц при прохождении уединенных внутренних волн, а также их траекторий от амплитуды солитонов и стратификации плотности жидкости подробно исследованы в работах [14, 15] в рамках различных слабонелинейных моделей. Целью настоящей работы является изучение процессов переноса жидких частиц при распространении длинных нелинейных локализованных волновых пакетов — бризеров. Форма таких осциллирующих волновых пакетов может меняться в широких пределах от пары разнополярных связанных осциллирующих солитонов до волнового пакета с солитоноподобной огибающей в зависимости от параметров бризера [16—19]. Долговременное распространение бризера внутренней волны в рамках уравнений Эйлера было подтверждено численным моделированием [20]. Осциллирующие волновые пакеты иногда также наблюдаются в океане. Например, в [21], где приведены результаты исследования поля внутренних волн у побережья Южной Кореи, зафиксирован бризероподобный пакет внутренних волн. Наблюдения волнового пакета также приведены в книге Осборна [10] для Андаманского моря.

Лагранжевы траектории: структура поля скорости при распространении бризера внутренней волны. Слабонелинейная теория длинных внутренних волн часто привлекается для описания наблюдаемых уединенных возмущений и волновых цугов. Здесь мы будем использовать слабонелинейную теорию длинных волн в стратифицированной среде для инициализации полей скорости и расчета зависящих от скоростей Лагранжевых траекторий частиц, определяемых из решения системы дифференциальных уравнений [14, 22]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{U}(\vec{r}(t), t), \\ \vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$ — вектор, содержащий координаты частицы в момент времени t , $\vec{U}(\vec{r}(t), t) = (u(x, z, t), w(x, z, t))$ — вектор скорости в данной точке, содержащий значения горизонтальной и вертикальной компонент, $\vec{r}_0 = (x_0, z_0)$ — вектор начальных координат частицы.

При расчете волновых полей нами используются приближение Буссинеска и твердой крышки на поверхности (обычно применяемые при описании внутренних волн в условиях реального океана). Жидкость предполагается невязкой. Не учитываются фоновые сдвиговые горизонтальные течения и эффекты вращения Земли.

Слабонелинейная теория длинных внутренних волн в стратифицированной жидкости (здесь рассматривается вертикальная плоскость) предполагает представление волнового поля (в частности, смещения изопикнических поверхностей) в виде ряда [23]:

$$\zeta(z, x, t) = \eta(x, t)\Phi(z) + \eta^2(x, t)T_n(z), \quad (2)$$

где x — горизонтальная ось, z — вертикальная ось, направленная вверх, t — время, $\eta(x, t)$ описывает трансформацию волны вдоль оси распространения и ее эволюцию во времени. Модовая функция

$\Phi(z)$ (вертикальная бароклинная мода) описывает вертикальную структуру длинных внутренних волн, а функция $T_n(z)$ является первой нелинейной поправкой к линейной моде $\Phi(z)$. Функция $\Phi(z)$ определяется решением следующей задачи на собственные значения:

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c^2}\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(H) = 0. \quad (3)$$

Здесь собственное значение c определяет фазовую скорость длинных линейных внутренних волн, H — глубина бассейна; $z = 0$ соответствует дну, $z = H$ — поверхности воды; $N(z)$ — частота плавучести (Брента—Вяйсяля), определяемая формулой:

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz},$$

где g — ускорение свободного падения, $\rho(z)$ — невозмущенный профиль плотности морской воды. Известно, что задача (3) обладает бесконечным набором решений: собственных значений $c^1 > c^2 > c^3 > \dots$ и собственных функций $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$. Как правило, значительная часть энергии спектра наблюдаемых в океане внутренних волн приходится на низшую моду, которой соответствует решение Φ , не имеющее нулей внутри интервала $z \in (0, H)$. Удобно нормализовать решение так, чтобы максимум $\Phi(z)\Phi_{\max}$ был $\Phi_{\max} = \Phi(z_{\max}) = 1$.

В этом случае решение в низшем порядке $\eta(x, t)$ совпадает с изопокической поверхностью на горизонте z_{\max} :

$$\zeta(x, z_{\max}, t) = \eta(x, t). \quad (4)$$

Функция $T_n(z)$ находится как решение неоднородной краевой задачи:

$$\frac{d^2T_n}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2}T_n = -\frac{\alpha}{c} \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{3}{2} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right], \quad T_n(0) = T_n(H) = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{3c}{2D} \int_0^H \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^3 dz, \quad D = \int_0^H \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz.$$

При таком подходе функция $\eta(x, t)$ удовлетворяет нелинейному эволюционному уравнению Гарднера:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \left(c + \alpha\eta + \alpha_1\eta^2 \right) \frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются через функции $\Phi(z)$ и $T_n(z)$:

$$\beta = \frac{c}{2D} \int_0^H \Phi^2 dz.$$

Решение краевых задач (3), (5) обычно строится на основании модельных или измеренных профилей плотности морской воды, по которым находится профиль частоты Брента—Вяйсяля (3). Также для этого могут использоваться уравнение состояния морской воды [24], океанографические базы данных и климатологические атласы, содержащие данные о распределении температуры и солености, например, GDEM [25] или WOA [26].

При положительных значениях коэффициента кубической нелинейности α_1 существуют бризерные решения уравнения (6), которые были получены впервые в работе [27]. Если характерные пространственные и временные масштабы волновых движений определены следующим образом:

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{6\beta|\alpha_1|}{\alpha^2}}, \quad \tilde{T} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{6\beta|\alpha_1|}{\alpha^2} \right)^{3/2}, \quad A_0 = \frac{\alpha}{|\alpha_1|}, \quad V_0 = \frac{\tilde{L}}{\tilde{T}},$$

то бризеры уравнения Гарднера в размерном виде описываются следующей формулой:

$$A(x, t) = 2A_0qP \frac{\frac{\text{ch}\eta \cos \psi + \cos \theta \text{ch}\varphi}{q \sin \theta \text{ch}\varphi + p \text{sh}\eta \cos \psi} + \frac{\text{sh}\eta \sin \psi + \sin \theta \text{sh}\varphi}{q \cos \theta \text{sh}\varphi - p \text{ch}\eta \sin \psi}}{\frac{p \text{ch}\eta \sin \psi - q \cos \theta \text{sh}\varphi}{q \sin \theta \text{ch}\varphi + p \text{sh}\eta \cos \psi} - \frac{p \text{sh}\eta \cos \psi + q \sin \theta \text{ch}\varphi}{q \cos \theta \text{sh}\varphi - p \text{ch}\eta \sin \psi}}, \quad (7)$$

где

$$\eta = q \left(x / \tilde{L} - V_{BR} \cdot t / \tilde{T} - x_{BR} / \tilde{L} \right), V_{BR} = q^2 - 3p^2, \theta = p \left(x / \tilde{L} - \omega_{BR} \cdot t / \tilde{T} - x_{ph} / \tilde{L} \right),$$

$$\omega_{BR} = 3q^2 - p^2, \delta = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{i+\gamma}{i-\gamma}, \gamma = q + ip, \varphi = \text{Re}(\gamma\delta), \psi = \text{Im}(\gamma\delta).$$

Параметры q и p являются свободными, причем на них накладывается условие:

$$q > 0, p > 0.$$

При $p \gg q$ волновой пакет содержит большое число волн. Групповая скорость бризера (скорость огибающей) равна $V = c + V_{BR} \cdot V_0$, величина является скоростью несущей, x_{BR} и x_{ph} — произвольные действительные константы. Через время

$$T = T_{BR} \cdot \tilde{T}, T_{BR} = \frac{\pi}{p(q^2 + p^2)}$$

бризер периодически повторяет свою форму.

Расширенное уравнение Кортевега—де Вриза, из которого посредством учета членов квадратичной и кубической нелинейности в одном порядке получено уравнение Гарднера, содержит также дисперсионные поправки к вертикальной структуре модовой функции. Первая такая дисперсионная поправка так же, как и функция $T_n(z)$ находится из решения неоднородной краевой задачи:

$$\frac{d^2 T_d}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2} T_d = -2\beta \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \Phi, T_d(0) = T_d(H) = 0.$$

Выражение (2) с учетом первой дисперсионной поправки принимает вид:

$$\zeta(z, x, t) = \eta(x, t)\Phi(z) + \eta^2(x, t)T_n(z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x, t)T_d(z).$$

Компоненты скорости частиц жидкости (u, w) в вертикальной плоскости (x, z) записываются в виде:

$$u(x, z, t) = u_{lin} + u_n + u_d, u_{lin} = c\eta(x, t) \frac{d\Phi}{dz}, u_n = \left(\frac{\alpha}{2} \frac{d\Phi}{dz} + c \frac{dT_n}{dz} \right) \eta^2, u_d = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[\beta \frac{d\Phi}{dz} + c \frac{dT_d}{dz} \right],$$

$$w(x, z, t) = w_{lin} + w_n + w_d, w_{lin} = -c \frac{\partial \eta}{\partial x} \Phi(z),$$

$$w_n = -(\alpha\Phi(z) + 2cF(z))\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}, w_d = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} [\beta\Phi + cT_d].$$

Горизонтальный компонент скорости u дает наибольший вклад в локальную скорость течения. Это типично для длинных волн, и эта характеристика поля внутренних волн должна преимущественно рассматриваться при анализе процессов переноса частиц волнами, в том числе переноса в придонной области.

Таким образом, для вычисления траекторий жидких частиц при прохождении бризера внутренней волны необходимо определить модовую функцию $\Phi(z)$, нелинейную поправку к ней $T_n(z)$ (мы также будем учитывать влияние дисперсионной поправки $T_d(z)$) и смещение изопикн на уровне z_{max} (4). Вид и амплитуда функции $\eta(x, t)$ зависит от многих внешних факторов, определяющих генерацию внутренних волн, поэтому $\eta(x, t)$ находится путем детального численного моделирования в рамках уравнения Гарднера (6) или уточненных моделей КдВ-иерархии.

Инициализация модели. В качестве модельной выбрана квазитрехслойная стратификация плотности жидкости, определяемая выражением

$$\rho(z) = \rho_0 - \Delta\rho_1 \tanh\left(\frac{z - z_{pyc1}}{d_{pyc1}}\right) - \Delta\rho_2 \tanh\left(\frac{z - z_{pyc2}}{d_{pyc2}}\right),$$

где $z_{pyc1} = -20$, $z_{pyc2} = -50$, $d_{pyc1} = d_{pyc2} = 4$, $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2 = 5$ кг/м³, $\rho_0 = 1020$ кг/м³ при полной глубине

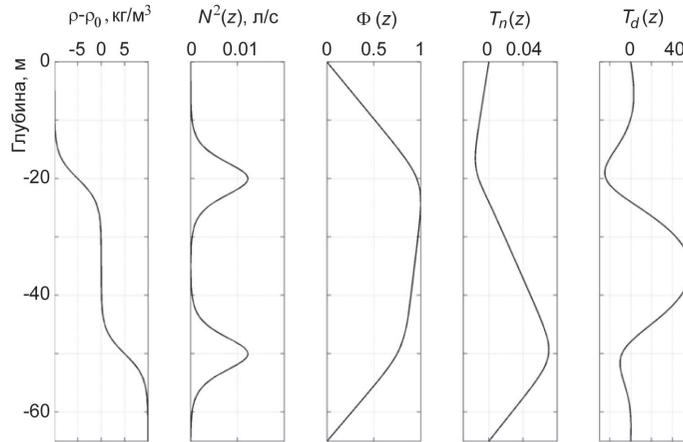


Рис. 1. Вертикальное распределение следующих характеристик (слева направо): плотностная стратификация, частота Брента—Вайсяля, модовая функция $\Phi(z)$, первая нелинейная поправка к модовой функции — $T_n(z)$, первая нелинейная поправка к модовой функции — $T_d(z)$ в модельном бассейне.

бассейна, равной 65 м (рис. 1). Для такой жидкости решены задачи (3), (5), (9), функции $\Phi(z)$, $T_n(z)$, $T_d(z)$ представлены на рис. 1.

Параметры бризера первой моды (7) определены следующим образом: $q = 1$, $p = 3$. В разные моменты времени на своем периоде бризер будет иметь разную форму и индуцировать разные поля скорости внутри жидкости. Поэтому введем бегущие координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= q \left(x / \tilde{L} - (c / V_0 + V_{BR})(t + t_0) / \tilde{T} + (c + V_{BR}V_0)t_0 / \tilde{L} \right), \\ \theta &= p \left(x / \tilde{L} - (c / V_0 + \omega_{BR})(t + t_0) / \tilde{T} + (c + V_{BR}V_0)t_0 / \tilde{L} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда выбирая t_0 на интервале $[0, T_{br}]$, получим в начальный момент времени любые возможные конфигурации волнового пакета, причем его центр будет находиться в точке $x = 0$.

Результаты моделирования: траектории жидких частиц. Будем исследовать траектории частицы, находящейся на некотором расстоянии от центра волнового пакета и смещающейся бризером выбранной конфигурации за время, равное полупериоду исследуемого волнового пакета (время, достаточное для захвата частицы, ее перемещение и отбегание от этой частицы).

Рассмотрим перенос частиц бризером первой моды, определяемым соотношениями (7), (8), (13) с параметрами $q = 1$, $p = 3$, $t_0 = 0$. На рис. 2 представлено поле смещений (2) для такого бризера в начальный момент времени и схема расположения жидких частиц, за которыми проводится наблюдение.

На рис. 3 представлено мгновенное распределение скорости для такого слабонелинейного бризера. Как видно из рис. 3, поле скорости внутри бризера внутренней волны имеет сложную структуру и представляет собой последовательность потоков, имеющих протяженность порядка 400—600 м, в каждом из которых направления, определяемые векторами полной скорости, представляют собой концентрические «окружности», расположенные во всей толще жидкости — от поверхности до дна. При этом направление движения в соседних потоках всегда различно. В каждый последующий момент времени это локализованное поле скорости будет перемещаться вместе с волной и изменять свою структуру. Такая сильная нелинейность, связанная

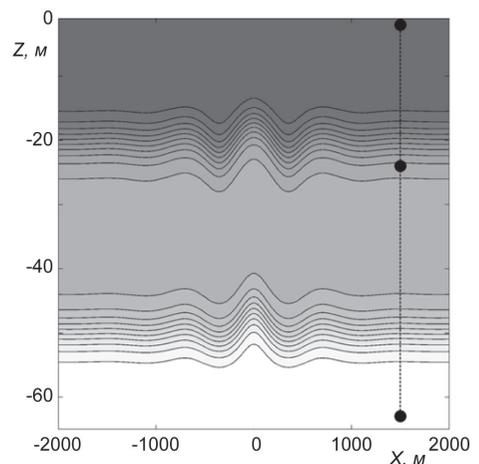


Рис. 2. Поле аномалии плотности для бризера с параметрами $q = 1$, $p = 3$ при $t = 0$, $t_0 = 0$; черными точками отмечены положения жидких частиц, за которыми происходит наблюдение.

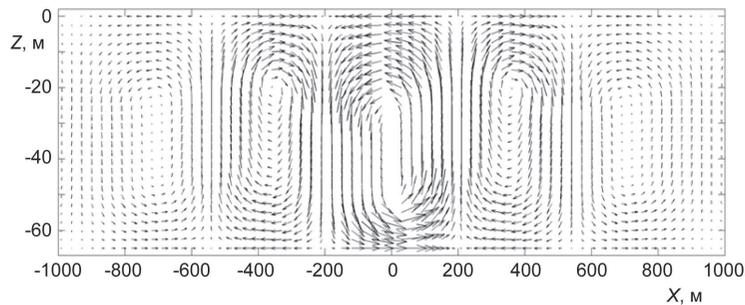


Рис. 3. Поле скорости для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при $t = 0, t_0 = 0$.

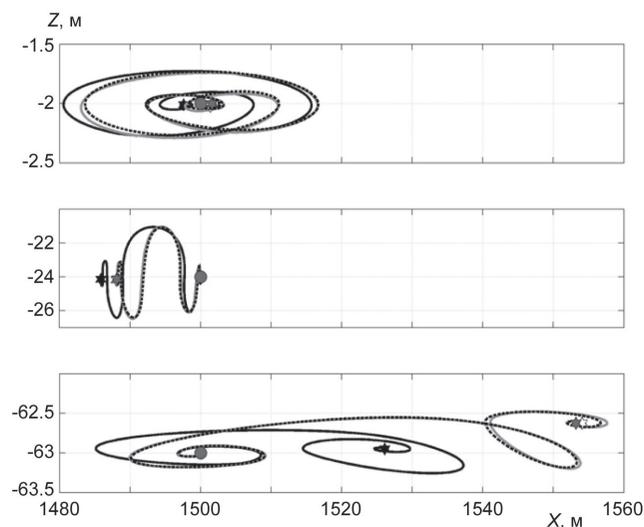


Рис. 4. Траектории жидких частиц на разных горизонтах для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при $t_0 = 0$. Черные сплошные линии и черные звездочки в конечной точке — решение задачи (1) для линейного приближения; серые линии и белые звездочки — решение слабонелинейной задачи; черные пунктиры и серые звездочки — решение слабонелинейной слабодисперсионной задачи.

с возможностью мгновенного изменения как направления, так и модуля полной скорости, в сочетании с нелинейностью исходной задачи (1) приводит к необходимости вычисления траекторий жидких частиц с очень хорошим разрешением по времени, что обуславливает сложность получения решения в полнонелинейной задаче при численном интегрировании исходных уравнений гидродинамики невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости.

Для исследования влияния нелинейных и дисперсионных поправок на расстояние переноса частиц, задача (1) решалась для трех видов волновых полей:

- линейное приближение: поле смещений определяется только первым слагаемым в формуле (10), поля компонент скоростей состоят только из линейных компонент u_{lin} и w_{lin} ;
- слабонелинейное приближение по модовой функции (характерное для модели Гарднера): поле смещений определяется суммой линейного слагаемого и первой нелинейной поправки к нему в формуле (10), поля компонент скоростей также определяются суммой линейных и нелинейных компонент u_{lin} и u_n, w_{lin} и w_n ;
- слабонелинейное слабодисперсионное приближение: учитываются все слагаемые в выражениях (10)–(12).

На рис. 4 представлены траектории жидких частиц, расположенных вблизи дна и поверхности, а также в верхнем пикноклине вблизи максимума линейной моды, полученные с учетом трех рассматриваемых приближений для анализируемого локализованного волнового пакета. Из рис. 4 можно видеть, что в рамках слабонелинейного и слабонелинейного слабодисперсионного приближения

получены практически совпадающие траектории жидких частиц, что свидетельствует о несущественности учета слабодисперсионного приближения при решении настоящей задачи. Расстояния переноса и траектории жидких частиц в линейном приближении заметно отличаются от аналогичных характеристик, полученных при решении слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной задач. Вблизи поверхности, несмотря на извилистость траекторий, частицы почти возвращаются на свое место при прохождении бризера внутренней волны (расстояние переноса по горизонтали составляет примерно 2 м для слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной модели и -2 м. В пикноклине в рамках всех рассматриваемых моделей происходит смещение частиц в сторону, противоположную направлению распространения волны, примерно на 12—14 м. Максимальное расстояние переноса достигается вблизи дна и составляет порядка 55 м для слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной моделей и 25 м для линейной модели.

Поскольку расстояние переноса и вид траекторий частиц зависит от конфигурации волнового пакета, с которым «взаимодействуют» частицы, на рис. 5 представлен график зависимости горизонтальных смещений частиц, отмеченных на схеме 2, в рамках трех подходов в зависимости от параметра t_0 . Как видно из рис. 5, решения слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной задач при всех значениях параметра t_0 расположены близко. Линейная теория в придонном слое существенно недооценивает расстояния переноса (почти в два раза), за исключением случая, когда $t_0 = 0.8 T_{br}$. Вблизи максимума линейной моды расстояния переноса частиц отличаются несущественно в рамках всех трех подходов, направления переноса также совпадают. В приповерхностном слое расстояния смещений малы, направления смещения различны для линейной модели, слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной модели.

На рис. 6 представлено сравнение расстояний вертикального смещения частиц при прохождении бризера внутренней волны с параметрами $q = 1, p = 3$ при изменяющемся параметре t_0/T_{br} в рамках трех рассматриваемых моделей. Из рис. 6 видно, что максимальное вертикальное смещение в придонном слое и верхнем пикноклине составляет всего 0.5 м, а в приповерхностном слое колеблется в пределах нескольких см, что сравнимо с ошибкой вычисления. Однако размах вертикальных колебаний частиц вблизи уровня верхнего пикноклина, где расположен максимум модовой функции, в поле рассматриваемого бризера внутренней волны может достигать порядка 5 м, как это видно из рис. 4.

На рис. 7 изображены траектории жидких частиц для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при $t_0 = 0.8 T_{br}$. Можно видеть несущественное качественное отличие смещений частиц этой конфигурацией волнового пакета от траекторий для этого же бризера при $t_0 = 0$ только в придонном слое.

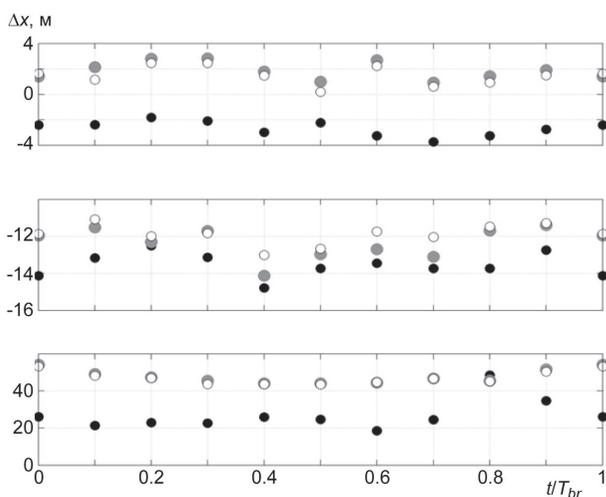


Рис. 5. Расстояние горизонтального переноса жидких частиц для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при изменяющемся параметре t_0/T_{br} .

Черные круги — для линейного приближения, белые круги — решение слабонелинейной задачи, серые круги — решение слабонелинейной слабодисперсионной задачи.

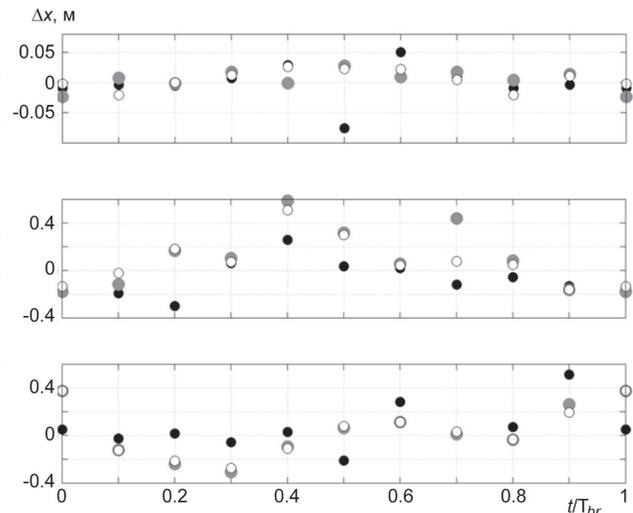


Рис. 6. Расстояние вертикального переноса жидких частиц для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при изменяющемся параметре t_0/T_{br} .

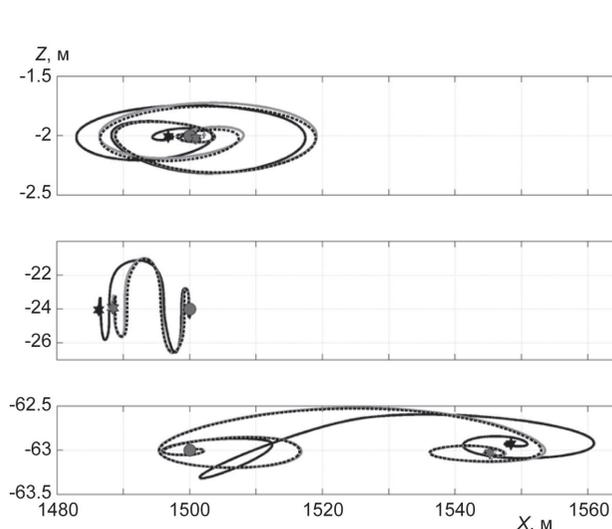


Рис. 7. Траектории жидких частиц для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при $t_0 = 0.8 T_{br}$. Обозначения такие же, как для рис. 4.

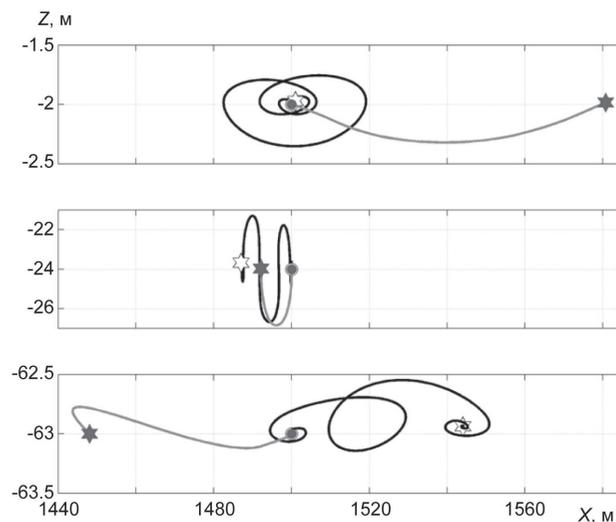


Рис. 8. Траектории жидких частиц для бризера с параметрами $q = 1, p = 3$ при $t_0 = 0.5 T_{br}$ (черные линии и белые звездочки в конечной точке) и солитона отрицательной полярности с амплитудой 3 м (серые линии и серые звездочки в конечной точке).

На рис. 8 представлено сравнение смещения частиц при прохождении слабонелинейного локализованного волнового пакета, исследуемого в настоящей работе, и при прохождении солитона внутренней волны, имеющего в максимуме линейной моды амплитуду, равную амплитуде волнового пакета и составляющую примерно 3 м (амплитуда бризера определялась как полусумма абсолютных значений максимума и минимума смещения в максимуме линейной моды). Для сравнения расстояния переноса была выбрана конфигурация бризера с параметром $t_0 = 0.5 T_{br}$, при которой наблюдалось наименьшее горизонтальное смещение частиц в придонном слое. Как видно из рис. 8, вид траекторий существенно различается для уединенной волны и локализованного нелинейного волнового пакета, поскольку существенно отличается структура волновых полей для бризера и солитона. Если для солитона (отрицательной полярности) максимальное расстояние переноса достигается на поверхности жидкости и составляет примерно 80 м, то для бризера максимальное горизонтальное смещение частиц происходит в придонном слое и составляет порядка 55 м. В приповерхностном же слое смещение частиц бризером мало — порядка 1 м, а сама траектория имеет закрученный, фактически замкнутый вид, чем существенно отличается от почти прямолинейной траектории, полученной при прохождении солитона. Вблизи максимума линейной моды обе траектории ведут себя похоже: совпадает направление смещения, достаточно близки величины расстояний переноса, некоторое сходство наблюдается даже в форме траекторий. В придонном слое частицы будут перемещаться бризером и солитоном в противоположных направлениях, но на сравнимые расстояния.

Таким образом, в настоящей работе исследованы особенности переноса жидких частиц при прохождении бризера внутренней волны с выбранными фиксированными параметрами в рамках трех подходов: линейной, слабонелинейной и слабонелинейной слабодисперсионной моделей. Сделан вывод о том, что использование слабонелинейной модели достаточно для определения траекторий жидких частиц, поскольку учет первой дисперсионной поправки почти не влияет на качественные и количественные характеристики смещения частиц. Показано существенное отличие решения задачи о траекториях жидких частиц для двух типов нелинейных волновых движений в стратифицированной жидкости — солитонов и бризеров.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 2014/133 («организация проведения научных исследований») и Задание № 5.30.2014/К).

Литература

1. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
2. Морозов Е. Г. Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
3. Сабинин К. Д., Коляев К. В. Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
4. Bogucki D., Dikky T., Redekopp L. G. Sediment resuspension and mixing by resonantly generated solitary waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 7. P. 1181—1196.
5. Mak Kinnan J. A., Gregg M. C. Mixing on the late-summer new England shelf-solibores, shear and stratification. Preprint. AGU. 1999. V. 4. 19 p.
6. Muller P., Briscoe M. Diapycnal mixing and internal waves // *Oceanography*. 2000. V. 13/2. P. 98—103.
7. Reeder D. B., Ma B. B., Yang Y. J. Very large subaqueous sand dunes on the upper continental slope in the South China Sea generated by episodic, shoaling deep-water internal solitary waves // *Marine Geol.* 2011. V. 279/12. P. 12—18.
8. Chakrabarti S. (Ed.) Handbook of offshore engineering. London: Elsevier, 2005.
9. Osborne A. R., Burch T. L., Scarlet R. I. The influence of internal waves on deep-water drilling // *J. Petroleum Technol.* 1978. V. 30/10. P. 1497—1504.
10. Osborne A. R. Nonlinear ocean waves and the Inverse Scattering Transform. Elsevier, San Diego, 2010.
11. Song Z. J., Teng B., Gou Y. et al. Comparisons of internal solitary wave and surface wave actions on marine structures and their responses // *Appl. Ocean Res.* 2011. V. 33. P. 120—129.
12. Bogucki D. J., Redekopp L. G. A Mechanism for sediment resuspension by internal solitary waves // *Geophys. Res. Lett.* 1999. V. 26. P. 1317—1320.
13. Stastna M., Lamb K. G. Sediment resuspension mechanisms associated with internal wave in coastal waters // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. P. C10016.
14. Lamb K. G. Particle transport by nonbreaking, solitary internal waves // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102/C8. P. 18641—18660.
15. Куркина О. Е., Куркин А. А., Гиниятуллин А. П. О переносе частиц при распространении уединенных внутренних гравитационных волн // *Известия АИИ им. Прохорова*. 2011. С. 92—102.
16. Clarke S., Grimshaw R., Miller P. et al. On the generation of solitons and breathers in the Modified Korteweg—de Vries Equation // *Chaos*. 2000. V. 10, N. 2. P. 383—392.
17. Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E., Talipova T. Wave group dynamics in weakly nonlinear long - wave models // *Physica D*. 2001. V. 159, N. 1—2. P. 35—57.
18. Slyunyaev A. V. Dynamics of localized waves with large amplitude in a weakly dispersive medium with a quadratic and positive cubic nonlinearity // *JETP*. 2001. V. 92, N. 3. P. 529—534.
19. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. et al. Short-living large-amplitude pulses in the nonlinear long-wave models described by the modified Korteweg—de Vries equation // *Studies in Applied Mathematics*. 2005. V. 114, N. 2. P. 189.
20. Lamb K., Polukhina O., Talipova T. et al. Breather generation in the fully nonlinear models of a stratified fluid // *Physical Rev. E*. 2007. V. 75, N. 4. P. 046306.
21. Lee J.-H., Lozovatsky I., Jang S.-T. et al. Episodes of nonlinear internal waves in the Northern East China Sea // *Geophysical Research Letters*. 2006. V. 33. P. L18601.
22. Toschi F., Bodenschatz E. Lagrangian properties of particles in turbulence // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2009. V. 41, N. 1. P. 375—404.
23. Pelinovsky E., Polukhina O., Slunyaev A., Talipova T. Internal solitary waves // *Solitary Waves in Fluids* / Ed. R. Grimshaw. Southampton, Boston: WIT Press, 2007. P. 85—110.
24. Fofonoff N., Millard R. Jr. Algorithms for computation of fundamental properties of seawater // *UNESCO Technical Papers in Marine Science*. 1983. N. 44. P. 15—25.
25. Teague W. J., Carron M. J., Hogan P. J. A Comparison between the Generalized Digital Environmental Model and Levitus Climatologies // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95(C5). P. 7167—7183.
26. Boyer T. P., Antonov J. I., Garcia H. E. et al. World Ocean Database 2005 / Ed. by S. Levitus. NOAA Atlas NESDIS 60. U. S. Government Printing Office, Washington, D. C. 2006. 190 p.
27. Pelinovsky D., Grimshaw R. Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential // *Phys. Lett. A*. 1997. V. 229. P. 165—172.

Статья поступила в редакцию 05.05.2015 г.

УДК 551.466.8

© Т. Г. Талипова^{1,2}, О. Е. Куркина², А. А. Наумов², А. А. Куркин²

¹Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород

²Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева
tgatalipova@mail.ru

Моделирование эволюции внутреннего бора в Печорском море

Выполнены численные расчеты эволюции поля внутренних волн в Печорском море, где ранее проводились измерения внутреннего бора. В рамках численной модели, основанной на обобщенном уравнении Гарднера, зарегистрированная в 1998 г. форма внутреннего бора использована в качестве граничного условия, что позволило дать возможный прогноз ее эволюции. Исследовано влияние изменчивости гидрологии и влияния диссипации в придонном пограничном слое и горизонтальной диффузии на прогнозируемые характеристики внутренних волн. Показано, что хотя характеристики внутренних волн чувствительны к этим факторам, тем не менее, резкий перепад в глубине залегания термоклина (бор) сохраняется на одном—двух километрах от места регистрации, а затем он трансформируется в солибор (ударная волна с ондуляциями). В рамках модели Гарднера исследован также собственно процесс возникновения бора из цуга внутренних волн в результате дисперсионного фокусирования.

Ключевые слова: внутренние волны, солибор, обобщенное уравнение Гарднера, диссипация.

T. G. Talipova^{1,2}, O. E. Kurkina², A. A. Naumov², A. A. Kurkin²

¹Institute of Applied Physics of RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Nizhny Novgorod State Technical University, Russia
tgatalipova@mail.ru

Modelling of the Evolution of the Internal Bore in the Pechora Sea

The numerical modeling of dynamics of the internal bore is done for the area in the Pechora Sea where the internal bore had been observed. The bore record obtained in 1998 is used as initial condition for numerical model based on the Gardner equation and analysis of bore evolution is done. The influences of hydrology variations and wave dissipation in the bottom boundary layer as well as the horizontal diffusion on the forecasted wave shape have been studied. It is shown that although internal wave characteristics are responsive to these factors nevertheless the abrupt overfall of isotherms in the thermocline (internal bore) is saved in one-two kilometers from the point of observation, and after that it is transformed into solibore (shock wave with ondulations). The process of internal bore generation from the train of nonlinear internal waves is studied as the result of the dispersive focusing.

Key words: internal wave, solibore, variable-coefficient Gardner equation, dissipation.

Внутренний бор, содержащий ондуляции, в современной литературе принято называть *солибором*. Он генерируется бароклинным приливом и наблюдается во многих районах Мирового океана, как в поверхностных, так и внутренних волнах, особенно на мелкой воде. Это явление присуще как низким и умеренным широтам [1—7, 13], так и высоким широтам, несмотря на то, что основной внутренний полусуточный прилив не распространяется в закритических широтах [8—10]. Нелинейная модель генерации внутреннего бора баротропным приливом в закритических широтах для Баренцева моря в районе о. Шпицберген приведена в работах [8, 10].

Явление внутреннего бора наблюдается на шельфах на глубинах 60—200 м [1—7]. Питер Холлоуэй (P. Holloway) опубликовал много примеров записей солиборов, один из таких примеров приведен в [1], когда солибор проходил через три точки регистрации, расположенных на северо-западном шельфе Австралии на глубинах от 109 м до 78 м. Численное моделирование одной из серий

таких наблюдений и её подробное обсуждение содержится в книге [11]. Наблюдения трансформации внутреннего бора вдоль Малин шельфа представлены в работе [5], а численное моделирование этой трансформации в [12]. Слежение за этим бором осуществлялось на расстоянии немного более 6 км в течение 8 ч. Бор распространялся на глубине ~150 м к берегу, трансформируясь по мере распространения в пакет солитонообразных волн с амплитудой около 30 м. Солитоноподобные волны на фронте этого бора появились во второй точке регистрации, расположенной на расстоянии 2 км от первой по направлению к берегу. Более длинный путь солибора в 26 км на шельфе Португалии исследован в статье [13] и промоделирован в работе [14].

Также в литературе отмечены наблюдения интенсивных внутренних солиборов и на глубинах, меньших 20 м. Как правило, генерация внутренних волн на таких глубинах связана с течениями, в частности со стоком в море распресненных речных вод [15—17]. Один из таких случаев описан в работе [15], когда внутренний бор генерируется выносом распресненных вод в фазе отлива из залива Апалачикола в северную часть Мексиканского залива на глубине 3 м при полной глубине всего 6 м. Скорость распространения фронта составляла 0.3 м/с, соленость на фронте изменялась от 32 до 18 промилле, температурный скачок достигал +2 °С. Подобная ситуация отмечалась и в других речных эстуариях [16]. Трансформация внутреннего бора, возникшего в эстуарии реки Амазонки, по мере его распространения наблюдалась на Амазонском полигоне в течение 6 сут [4]. Пакет нелинейных внутренних волн, на которые распался бор, сначала усиливался по мере распространения в глубоководную часть океана, а затем затух.

Исследование распространения внутренних боров на арктических шельфах, безусловно, затруднено из-за экстремальных климатических условий, однако имеющиеся данные по гидрологии в районах эстуариев больших сибирских рек позволяют предполагать значительное влияние нелинейности на трансформацию внутренних волн, а значит и возникновение там внутренних боров. В настоящее время известен, по-видимому, только один случай наблюдения внутреннего бора в Северном Ледовитом океане, а именно в мелководном Печорском море, в области устья р. Печоры [9]. Этот случай будет промоделирован в настоящей работе. Далее описаны наблюдения внутреннего бора в Печорском море, дана модель, по которой рассчитывается динамика солибора, кинематические характеристики внутренних волн в этом районе, а также результаты моделирования внутреннего бора.

Наблюдения внутреннего бора в Печорском море. Внутренний бор был зарегистрирован на шельфе Баренцева моря в так называемом Печорском море (область от Печорской губы до о. Вайгач). Море в этом районе достаточно мелководное, глубина составляет 15—25 м. Измерения внутренних волн проводились во время 13-го рейса НИС «Академик Сергей Вавилов» в августе 1998 г. с заякоренного судна при помощи измерителя вертикальных смещений термоклина. Результаты измерений и их интерпретация в рамках двухслойной модели представлены в [9]. На рис. 1 показан фрагмент записи внутренних волн в южной мелководной части Печорского моря (глубина 25—15 м) в районе 69°10' северной широты, 58°30' восточной долготы. Запись волны произведена на горизонте 5.46 м от поверхности (10.54 м от дна) при общей глубине 16 м.

К сожалению, в работе [9] не приведен профиль частоты плавучести в самом районе измерений волны. В настоящей работе для расчетов кинематических характеристик будут использованы данные о средней гидрологии, приведенные в атласе [18]. Ближайшими к району измерений в атласе являются две точки с координатами:

№	X, км	Y, км	H, м
3445	1950	-1200	25
3493	1950	-1200	15

Для этих точек известны температура и соленость на 5—6 горизонтах. По этим данным по известным формулам [19] оценивается частота Брента—Вяйсяля $N(z)$ (рис. 2):

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz}. \quad (1)$$

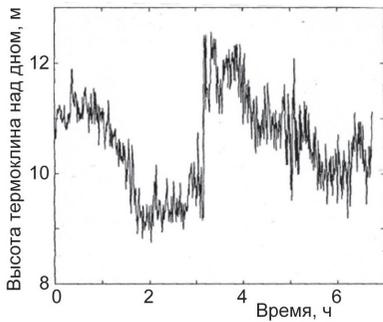


Рис. 1. Запись внутреннего солибора в Печорском море [10].

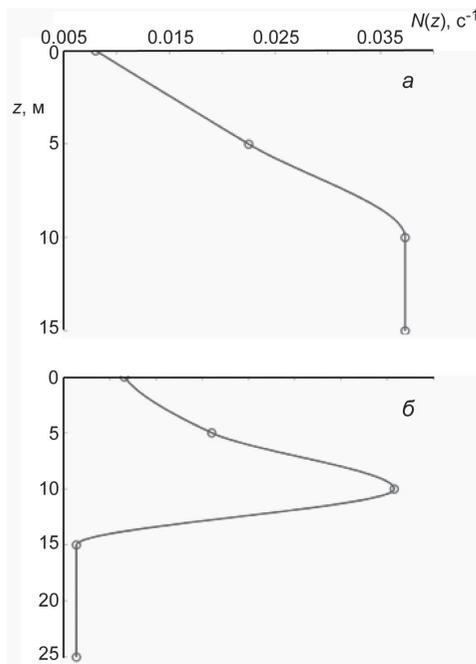


Рис. 2. Профили частоты Брента—Вяйсяля в Печорском море в районе измерений. а — точка № 3493; б — точка № 3445.

Следует отметить, что данные атласа [19] являются усредненными как по сезону, так и по пространству в пределах сетки, которая составляет $50 \times 50 \text{ км}^2$. Поэтому задача расчета трансформации внутреннего бора, приведенного в [9], ставится как модельная по весьма усредненным характеристикам.

Теоретическая модель трансформации внутренних волн во вращающемся океане. Для описания распространения внутренних волн в горизонтально-неоднородном вращающемся океане используется теоретическая и численная модель, основанная на уравнении Гарднера с учетом вращения Земли. Теоретическая модель разработана и описана в работах [20—24]. Соответствующая численная модель описана в [20, 24]. Модель верифицировалась на внутренних волнах, наблюдаемых на шельфах Австралии и Европы [12—14, 24], а также была применена для исследования трансформации солитонов внутренних волн на шельфе Карского моря и на шельфе моря Лаптевых [22]. Приведем кратко основные положения модели.

Модель основана на эволюционном уравнении Гарднера для неоднородной среды с вращением [20, 21]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\alpha Q}{c^2} \zeta + \frac{\alpha_1 Q^2}{c^2} \zeta \right)^2 \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\beta}{c^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} = \frac{f^2}{2c} \int \zeta ds, \quad (2)$$

где c — фазовая скорость длинной линейной волны; α — коэффициент квадратичной нелинейности; α_1 — коэффициент кубической нелинейности; β — параметр дисперсии (эти постоянные зависят от гидрологических параметров и топографии океана); f — параметр Кориолиса, связанный с периодом вращения Земли $T_e = 24 \text{ ч}$ и географической широтой φ : $f = (4\pi/T_e) \sin \varphi$; Q — коэффициент усиления линейной волны; $\zeta(x, s) = \eta(x, s)/Q(x)$ — нормированное на коэффициент усиления смещение частиц η на горизонте максимума моды $s = \int dx/c(x) - t$ — время в сопровождающей системе координат.

Для определения вертикальной структуры внутренней волны и расчета параметров ее распространения (скорости распространения и коэффициентов нелинейности и дис-

персии) решается краевая задача, которая в отсутствие поля течений имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \Phi(z)}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c^2} \Phi(z) = 0, \quad (3)$$

где $\Phi(z)$ — модальная функция внутренних волн; $N(z) = \sqrt{\frac{g d \rho(x)}{\rho dz}}$ — частота Брента—Вяйсяля; g — гравитационное ускорение; $\rho(z)$ — вертикальный профиль плотности морской воды, определяемый по данным гидрологических измерений; $\bar{\rho}$ — средняя плотность морской воды.

Физически удобно положить $\max \Phi(z) = 1$ (обозначим этот горизонт z_{\max} , который в общем случае меняется с расстоянием). В этом случае функция $\eta(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (1), имеет смысл смещения изопикны в точке максимума функции моды, а смещения изопикны на других горизонтах описываются выражением

$$\zeta(z, x, t) = \eta(x, t) \Phi(z) + \eta^2(x, t) F(z). \quad (4)$$

Здесь $F(z)$ — первая нелинейная поправка к вертикальной структуре волны, определяемая решением неоднородной краевой задачи:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2} F = -\alpha c \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{3}{2} c \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2, \quad (5)$$

$$F(0) = F(H) = 0, F(z_{\max}) = 0.$$

Коэффициенты дисперсии и нелинейности выражаются через вертикальную структуру моды следующим образом:

$$\alpha = \frac{3}{2I} \int_0^H c^2 (d\Phi / dz)^3 dz, \quad (6)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2I} \int_0^H dz \left\{ 3c^2 \left[3(dF / dz) - 2(d\Phi / dz)^2 \right] (d\Phi / dz)^2 + \right. \\ \left. + \alpha c \left[5(d\Phi / dz)^2 - 4(dF / dz) \right] (d\Phi / dz) - \alpha^2 (d\Phi / dz)^2 \right\}, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{1}{2I} \int_0^H c^2 \Phi^2 dz, \quad (8)$$

где $I = \int_0^H c (d\Phi / dz) dz$; H — полная глубина бассейна.

Коэффициент линейного усиления волны Q определяется формулой:

$$Q = \sqrt{\frac{c_0^3 \int (d\Phi_0 / dz)^2 dz}{c^3 \int (d\Phi / dz)^2 dz}}, \quad (9)$$

где индекс «0» соответствует значению в фиксированной точке x_0 .

Отметим, что коэффициенты нелинейности α и α_1 могут принимать как положительные, так и отрицательные значения или равняться нулю, а коэффициент дисперсии β всегда положителен.

Поскольку из данных наблюдений известно, что 95 % энергии внутренней волны приходится на первую моду, мы ограничимся рассмотрением структуры только первой моды Φ и соответствующих скоростей c .

Расчет коэффициентов модели. Кинематическими характеристиками внутренней волны являются коэффициенты уравнения (1). Коэффициенты модели зависят опосредованно от стратификации (профиля частоты Брента—Вяйсяля) и от глубины океана. Как видно из рис. 2, стратификация для Печорского моря дается по 4—5 точкам, что предполагает достаточно грубые оценки параметров модели. Поэтому нами для моделирования выбраны два варианта.

1) Глубина моря по пути распространения волны принимается постоянной и равной 15 м, кинематические характеристики модели рассчитываются, исходя из стратификации, показанной на рис. 2, а, которая также предполагается одинаковой по мере распространения волны. Рассчитанные параметры модели для этого случая приведены в таблице.

Поскольку коэффициент квадратичной нелинейности положительный, а кубической нелинейности — отрицательный, то образующиеся солитоны будут иметь положительную полярность. Амплитуда предельного солитона для этого случая почти достигает толщины верхнего слоя, т. е. 10 м. Слишком малое значение коэффициента дисперсии и значительные величины нелинейных коэффициентов должны приводить к образованию за кинком солитонов малой длительности.

2) Глубина моря выбирается постоянной и равной 25 м, стратификация морской воды также постоянна по мере распространения волны и соответствует стратификации, приведенной на рис. 2, б. Рассчитанные параметры модели для этого случая приведены в таблице. Здесь коэффициент квадратичной нелинейности отрицательный, поэтому солитоны будут иметь отрицательную полярность, их амплитуда не должна превышать амплитуду предельного солитона, равную 3.9 м.

Коэффициенты нелинейности в этих случаях различаются по знаку, а их абсолютные значения различаются на 30 %. Понятно, что развивающиеся на фоне бора солиборы будут принципиально разными по знаку, но интересно рассмотреть влияние именно этого различия на «длину жизни» бора, до его преобразования в солибор.

Рассчитанные параметры модели

Коэффициенты	Ст. 3493 (69.436 °с.ш., 56.659 °в.д.)	Ст. 3445 (69.684 °с.ш., 57.724 °в.д.)
c , м/с	0.1510	0.2203
β , м ³ /с	1.6295	6.2806
α , с ⁻¹	0.01818	-0.0135
α_1 , (м·с) ⁻¹	-0.00183	-0.00347
Q	1	1

Запись внутренней волны, приведенная на рис. 3, оцифрована с интервалом в 18 с. Низкочастотные приливные колебания были отфильтрованы. Запись дополняется нулевыми значениями в точках 0 и 7 ч. Поскольку численная модель решается для периодических граничных условий по времени, то, чтобы избежать влияния границ, временной интервал записи был расширен до 13.5 ч, этого оказалось достаточно. Входной сигнал численной модели пересчитан из записи на горизонте 10.54 м от дна на горизонт пикноклина — 5 м от дна

$$\eta = \frac{\xi}{\Phi(z_0)}, \quad (10)$$

где η — вертикальное смещение от горизонта максимума модовой функции; $z_0 = 10.54$ м; $\Phi(z_0) = 0.653$. Запись внутренней волны является сильно зашумленной, поэтому было произведено сглаживание сигнала с помощью алгоритма, разработанного в работе [25]. После процедуры сглаживания колебания максимальной изоциклы (входной сигнал) приняли вид, показанный на рис. 3.

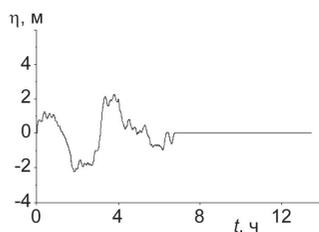


Рис. 3. Форма входного сигнала после сглаживания, точка 0 км.

Результаты моделирования. Расчет эволюции внутренних волн проводился нами с целью оценки времени жизни определенных форм волнового движения, в частности, внутреннего бора (не содержащего ондуляции) и солибора (с ондуляциями). Исходная волна использовалась как для расчетов в сторону «положительных» значений пути волны для оценки ее «будущего», так и в сторону «отрицательных» значений пути волны для оценки ее «прошлого» состояния. Влияние стратификации на динамику внутреннего бора оценивается по двум вариантам. На мелководье роль диссипации энергии внутренних волн становится важной, этот фактор также учитывался в численной модели.

Широта для обоих вариантов бралась равной 69.1° с.ш.

Вариант 1. Коэффициенты модели приведены в таблице. Как упоминалось выше, влияние в этом случае кубической нелинейности на рассматриваемый бор незначительно, поскольку амплитуда бора в несколько раз меньше амплитуды предельного солитона. Поэтому можно ожидать, что трансформация внутреннего бора пойдет практически по сценарию, обычному для уравнения Кортевега—де Вриза [20]. Как видно из рис. 4, именно этот сценарий и реализуется при распространении волны в прямом и обратном направлениях. Волна «движется» по оси времени справа налево. Начальная форма бора сохраняется не более чем на расстоянии 0.7 км (почти 78 минут), после чего на расстоянии последующих 1.3 км он превращается в хорошо развитый солибор, содержащий группу узких солитонов, длительность которых составляет не более 8 мин. Расстояние, которое проходит бор от стадии образования до рассыпания на солитоны составляет для этого случая примерно 3 км, это расстояние волна проходит за 5 ч 35 мин.

Обратимость уравнения (1) по координате и времени позволяет рассчитать предыдущие стадии бора, которые представлены на том же рисунке на различных расстояниях от точки измерения. Бор возникает из двух трансформирующихся пакетов солитонообразных нелинейных волн - солиборов около точки -1 км или за 1 ч 45 мин до точки регистрации.

Вариант 2. Этот вариант рассматривается, чтобы исследовать влияние глубины на время жизни внутреннего бора. Здесь в первую очередь следует обратить внимание на то, что коэффициент

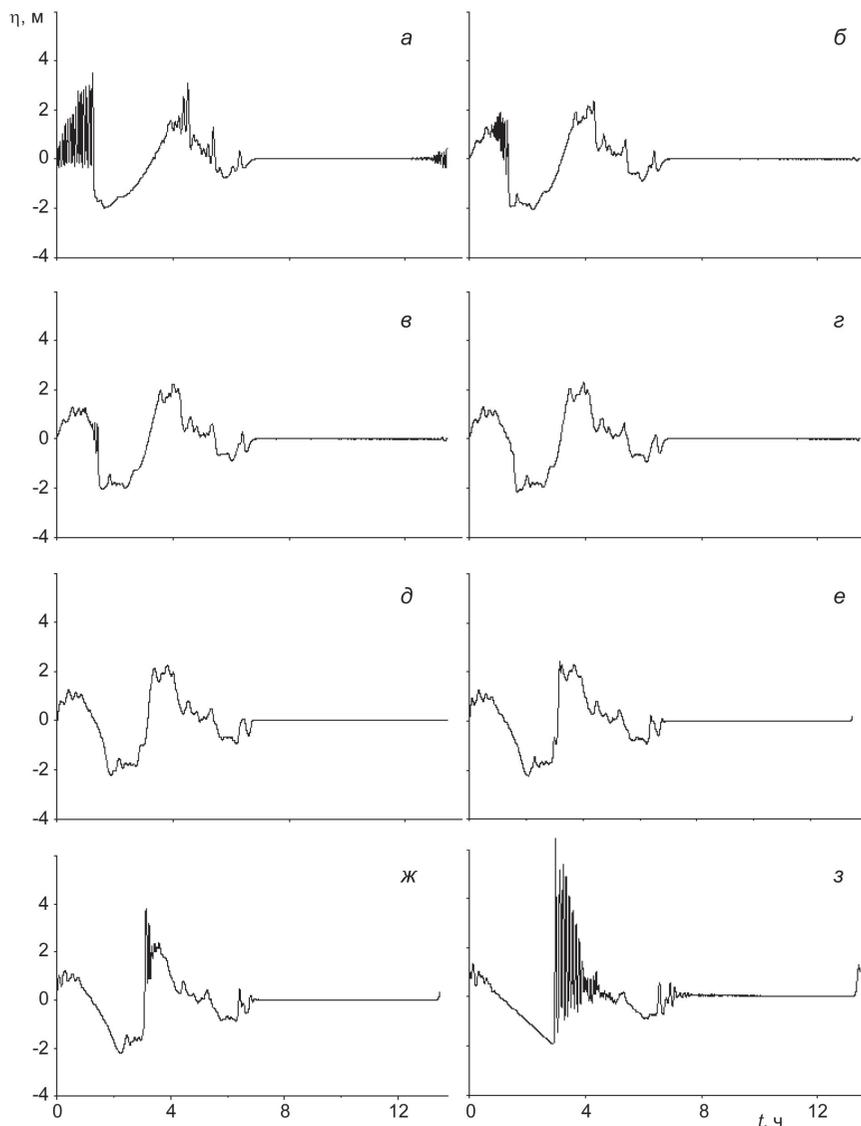


Рис. 4. Трансформация бора от точки -1 км до точки $+0.67$ км.

а — точка -2 км; *б* — -1.0 км; *в* — -0.67 км; *г* — -0.33 км; *д* — 0 км; *е* — 0.33 км; *ж* — 0.67 км; *з* — 2.0 км.

квадратичной нелинейности становится отрицательным, а это меняет полярность солитонообразных волн. Трансформация волны от «прошлого» к «будущему» для этого варианта представлена на рис. 5. Как «до точки записи», так и «после» волна превращается в два пакета отрицательных солитонов, то есть, в солиборы.

Из расчетов следует, что форма бора вследствие дисперсионного фокуса возникает на расстоянии примерно -1 км до района измерений и сохраняется до точки $+2$ км, это расстояние волна проходит в течение 3 ч 46 мин. Важно подчеркнуть, что солибор в этом случае, как и в предыдущем, сохраняется на значительных расстояниях (до 10 км) и имеет достаточно большое время жизни.

Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что, несмотря на некоторый разброс в скоростях распространения, параметрах нелинейности и дисперсии, наблюдаемая форма волны в исследуемом регионе сохраняется на расстоянии $1-2$ км в течение $3-3.5$ ч. Этот результат оказывается довольно устойчивым к весьма изменчивой гидрологии на мелководье.

Влияние диссипации. Выделяют следующие основные механизмы диссипации волн [26]: горизонтальная диффузия за счет турбулентности в толще воды и трение в придонном слое, которое параметризуется или линейной, или квадратичной скоростью в зависимости от структуры поля скорости. При моделировании наблюдаемых внутренних волн на глубинах более $100-200$ м в работе

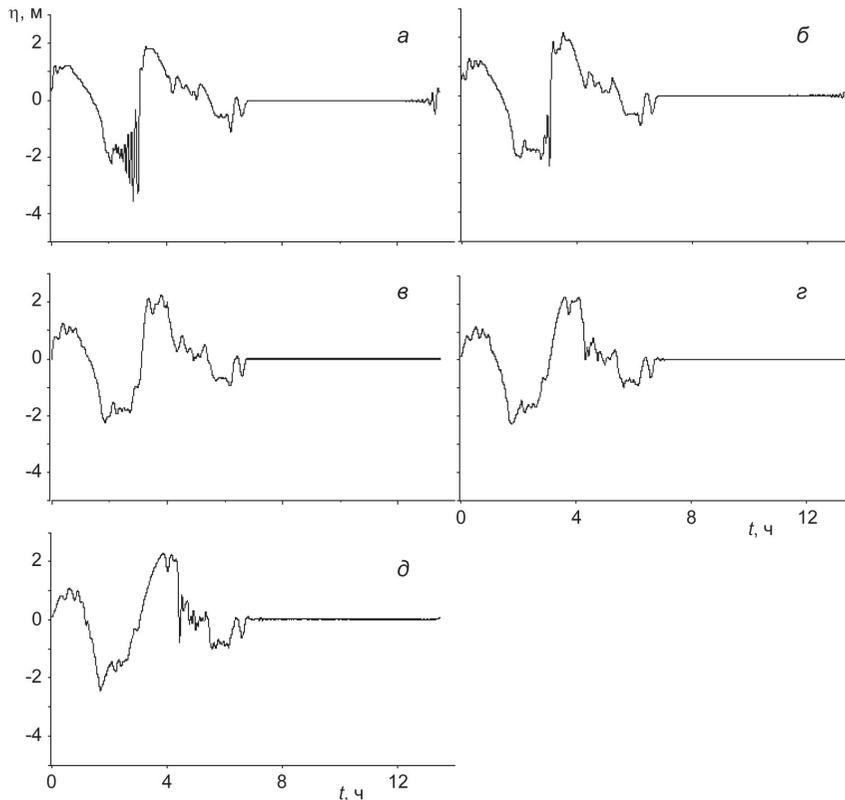


Рис. 5. Трансформация волны на более глубокой воде от точки -2 км до точки $+2$ км.
 a — точка -2 км; $б$ — -1 км; $в$ — 0 км; $г$ — 1 км; $д$ — 2 км.

[27] использовалась горизонтальная диффузия с коэффициентом $1 \text{ м}^2/\text{с}$, однако там же упоминается, что ее величина может меняться в зависимости от глубины океана и точки наблюдения. В работе [21] использована горизонтальная диффузия с коэффициентом $0.0002 \text{ м}^2/\text{с}$ и придонное трение в турбулентном слое по закону Шези с коэффициентом 0.0013 .

Члены, ответственные за диссипацию, добавляются в расширенное уравнение Кортевега—де Вриза аддитивно [21, 27]. Такая полуэмпирическая модель имеет следующий вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\alpha Q}{c^2} \zeta + \frac{\alpha_1 Q^2}{c^2} \zeta^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\beta}{c^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} - \frac{\nu}{c^3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} - \frac{kcQ}{\beta} \zeta |\zeta| = \frac{f^2}{2c} \int \zeta ds. \quad (11)$$

Это уравнение использовалось для моделирования распространения волны от исходной точки вперед при каждом из типов диссипации в отдельности. При этом рассматривались особенности трансформации волны, присущие каждому из типов диссипации. Моделирование проводилось для варианта 1.

Включение в модель горизонтальной диффузии с коэффициентом $\nu = 0.0001 \text{ м}^2/\text{с}$ приводит к тому, что волна успевает рассыпаться на солитоны, еще не затухнув. Этот процесс показан на рис. 6. Образование первого солитона приходится на точку 0.8 км по сравнению с 0.7 км (вариант 1 без затухания). К точке 15 км от исходного бора остается только КдВ солитон с амплитудой 1.6 м и небольшой осциллирующий хвост. К этому моменту потери энергии составляют 99% от энергии первоначального бора.

Другая картина трансформации внутреннего бора наблюдается с увеличением $\nu = 0.0005 \text{ м}^2/\text{с}$. Этот процесс показан на рис. 7. Фронт импульса становится практически вертикальным, при этом образуется ударная волна почти треугольной формы (точка 1 км), которая затухает, практически не меняя своей формы. Диссипация энергии здесь идет на переднем крутом фронте волны, а задние участки почти не меняют своей формы, падает только их высота. К точке 3 км волна потеряла 99.95% своей первоначальной энергии. Таким образом, горизонтальная диффузия приводит к «чисто» ударной внутренней волне, все ондуляции на ее теле быстро затухают.

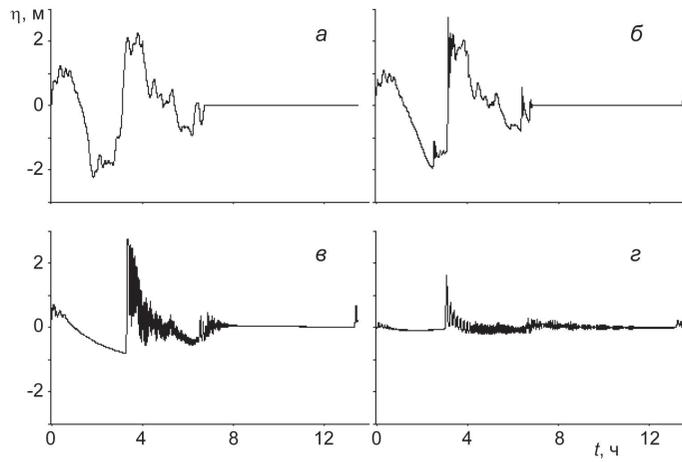


Рис. 6. Трансформация внутреннего бора при горизонтальной турбулентной диффузии $\nu = 0.0001 \text{ м}^2/\text{с}$.
a — точка 0 км; *б* — 1 км; *в* — 5 км; *г* — 15 км.

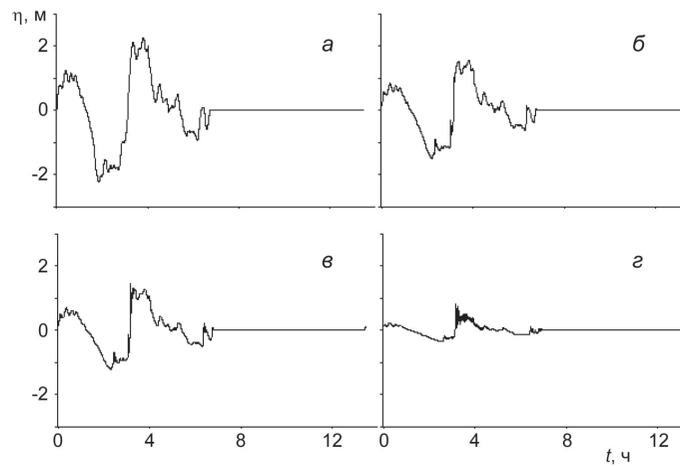


Рис. 7. Трансформация внутреннего бора при горизонтальной турбулентной диффузии $\nu = 0.0005 \text{ м}^2/\text{с}$.
a — точка 0 км; *б* — 0.67 км; *в* — 1 км; *г* — 3 км.

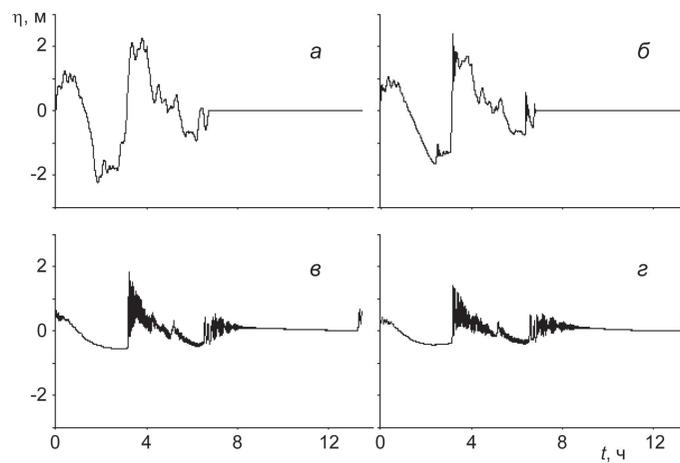


Рис. 8. Трансформация внутреннего бора при придонном трении по закону Шези с $k = 0.0013$.
a — точка 0 км; *б* — 1 км; *в* — 6 км; *г* — 8 км.

Трансформация бора под действием трения в придонном турбулентном слое с коэффициентом $k = 0.0013$ показана на рис. 8. Квадратичное трение не дает развиваться высоким и узким солитонам на переднем фронте волны, но участки с малыми возвышениями почти не теряют энергию при распространении. В результате солибор приобретает треугольную форму, с вершиной, покрытой ондуляциями (5 км). Далее волна затухает, не меняя своей формы. К точке 8 км волна потеряла 65 % своей начальной энергии. Таким образом, придонная диссипация в турбулентном пограничном слое сказывается меньше на структуре солибора, чем горизонтальная диффузия.

Итак, диссипация энергии, конечно же, уменьшает время жизни внутреннего бора, однако, как показали расчеты, ударный фронт сохраняется на расстояниях порядка 1 км, а солибор — на расстояниях до 15 км, подтверждая типичность распространения внутренней волны на мелководье в форме внутреннего бора или солибора, отмечаемую в экспериментальных работах.

Выполнены численные расчеты эволюции поля внутренних волн в Печорском море, где ранее были сделаны измерения внутреннего бора. В рамках численной модели, основанной на уравнении Гарднера—Островского, зарегистрированная форма внутреннего бора использована в качестве начального условия, что позволило дать возможный прогноз ее эволюции. Показано, что резкий перепад (кинк) сохраняется на расстоянии порядка одного-трех километров, а затем он трансформируется в солибор (ударная волна с ондуляциями), время жизни которого составляет 10—15 ч. Исследовано влияние различных механизмов диссипации в придонном пограничном слое на прогнозируемые характеристики внутренних волн.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (Задание № 2014/133 («организация проведения научных исследований») и Задание № 5.30.2014/К).

Литература

1. *Holloway P.* Internal hydraulic jumps and solitons at a shelf break region on the Australian North West Shelf // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 5405—5416.
2. *Wesson J. C., Gregg M. C.* Turbulent dissipation in the strait of Gibraltar and associated mixing // *Small-Scale Turbulence and Mixing in the Ocean* / Eds. J. Nihoul and B. Jamart. NY.: Elsevier Sci., 1988. P. 201—212.
3. *Farmer D., Arni L.* The flow of Atlantic Water through the Strait of Gibraltar // *Prog. Oceanogr.* 1988. V. 21. P. 1—10.
4. *Горячкин Ю. Н., Гродский С. А., Иванов В. А., Кудрявцев В. Н., Лисиченко А. Д., Пелиновский Е. Н.* Многосуточные наблюдения за эволюцией пакета внутренних волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1991. Т. 27, № 3. P. 326—334.
5. *Small J., Sawyer T. C., Scott J. C.* The evolution of an internal bore at the Malin shelf break // *Ann. Geophysicae.* 1999. V. 17. P. 547—565.
6. *Colosi J., Beardsley R., Lynch J., Gawarkiewicz G., Chiu C.-S., Scotti A.* Observations of nonlinear internal waves on the outer New England continental shelf during the summer Shelfbreak Primer study // *J. Geoph. Res.* 2001. V. 106(C5). P. 958—960.
7. *Sherwin T., Vlasenko V., Stashchuk N., Jeans D. G., Jones B.* Along-slope generation as an explanation for some unusually large internal bores // *Deep-Sea Res.* 2002. V. 49. P. 1787—1799.
8. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K., Sabinin K.* Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude // *Deep-Sea Res.* 2003. V. 50. P. 317—318.
9. *Шапиро Г. И., Шевченко В. П., Лисицын А. П., Серебряный А. Н., Политова Н. П., Акивис Т. М.* Влияние внутренних волн на распределение взвешенного вещества в Печорском море // *ДАН.* 2000. Т. 373, № 1. С. 105—107.
10. *Kurkina O., Talipova T.* Huge internal waves in the vicinity of Spitsbergen Island (Barents Sea) // *Natural Hazards Earth System Sciences.* 2011. V. 11. P. 981—986.
11. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* Internal tide transformation and oceanic internal solitary waves // *Environmental Stratified Flows* / Ed. R. Grimshaw. Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 29—60.
12. *Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н.* Моделирование распространяющихся длинных внутренних волн в неоднородном океане: теория и верификация // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 2. С. 46—54.
13. *Jeans D. R. G., Sherwin T. J.* The variability of strongly nonlinear solitary internal waves observed during an upwelling season on the Portuguese shelf // *Cont. Shelf Res.* 2001. V. 21. P. 1855—1878.
14. *Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Куркин А. А., Куркина О. Е.* Моделирование динамики длинных внутренних волн на шельфе // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2014. Т. 50, № 6. С. 714—722.
15. *Jonson D., Weidemann A.* A tidal plume front and internal solitons // *Continental shelf Res.* 1998. V. 18. P. 923—928.
16. *Garvine R. W., Monk J. D.* Frontal structure of river plume // *J. Geophys. Res.* 1974. V. 79. P. 2251—2257.
17. *Luketina D. A., Imberger J.* Characteristics of a surface buoyant jet // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 5435—5447.
18. *Joint U. S. - Russian Atlas of the Arctic Ocean.* University of Colorado, Boulder, CO P.B. 449, 80309—0449, 1998.

19. *Fofonoff N., Millard R. Jr.* Algorithms for computation of fundamental properties of seawater // UNESCO Technical Papers in Marine Science. 1983. N. 44. P. 15—25.
20. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B.* A Nonlinear Model of Internal Tide Transformation on the Australian North West Shelf // J. Physical Oceanography. 1997. V. 27, N. 6. P. 871—896.
21. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* A generalized Korteweg—de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone // J. Geophys. Res. 1999. V. 104(C8). P. 18333—18350.
22. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Modeling Internal solitary waves in the coastal ocean // Survey in Geophysics. 2007. V. 28, N. 2. P. 273—298.
23. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkina O.* Internal solitary waves: propagation, deformation and disintegration // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. V. 17. P. 633—649.
24. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Stepanyants Yu., Talipova T.* Modeling internal solitary waves on the Australian North West Shelf // Marine and Freshwater Research. 2006. V. 57, N. 3. P. 265—272.
25. *Guerra V., Tapia R. A.* A local procedure for error detection and data smoothing // MRC Technical Summary Rep. 1452, Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, USA. 1974.
26. *Grimshaw R.* Internal solitary waves // Environmental Stratified Flows / Ed. R. Grimshaw. Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 3—28.
27. *Liu K., Chang Y. S., Hsu M.-K., Liang N. K.* Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas // J. Geophys. Res. 1998. V. 103(C4). P. 7995—8008.

Статья поступила в редакцию 07.05.2015 г.

УДК 551.465.5+551.466

© Б. А. Каган, А. А. Тимофеев

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН

kagan@ioras.nw.ru, timofeev@ioras.nw.ru

Моделирование стационарной циркуляции и полусуточных поверхностных и внутренних приливов в проливе Карские Ворота

В рамках трехмерной конечно-элементной гидростатической модели QUODDY-4 выполнена серия численных экспериментов по воспроизведению стационарной циркуляции, а также поверхностных и внутренних M_2 приливов в районе пролива Карские Ворота. Форсинг обуславливается либо стационарными перепадами уровня свободной поверхности на открытой границе исследуемой области, либо приливными колебаниями уровня на той же границе, либо и тем и другим одновременно. Показано, что предсказываемые моделью амплитуды внутренних приливных волн на поднятии дна в этом проливе составляют порядка 10—16 м при средних (за сизигийно-квадратурный цикл) условиях. Примечательно, что максимальные амплитуды внутренних приливных волн отмечаются там, где внутренние приливные волны распространяются навстречу стационарному потоку. Результаты моделирования воспроизводят также стационарный поток массы, ориентированный из Баренцева моря в Карское, слабое западное поверхностное течение Литке, тенденцию к образованию вырожденной амфидромии с центром на о. Вайгач и изменения приливных фаз от 0 до 30° и от 330 до 0° в прилегающих частях Баренцева и Карского морей соответственно.

Ключевые слова: трехмерная модель, стационарная циркуляция, приливы, пролив Карские Ворота.

B. A. Kagan, A. A. Timofeev

Saint-Petersburg Department of the P.P.Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Russia

kagan@ioras.nw.ru, timofeev@ioras.nw.ru

Modeling of the Stationary Circulation and Semidiurnal Surface and Internal Tides in the Strait of Kara Gates

A series of numerical experiments is carried out, devoted to simulation of the stationary circulation and semidiurnal surface and internal tides in the region of the Kara Gates Strait. They are caused by either stationary contrasts of the free surface level at the open boundary of the domain under study, or by tidal elevations at the above boundary, or by means of both concurrently. It is shown that the predicted amplitudes of internal tidal waves on the bottom uplift in the strait amount to about 10—16 m under mean (over a syzygy-quadrature cycle) conditions. It is remarkable that the maximum internal tidal waves' amplitudes are detected where internal tidal waves propagate against the stationary flow. Modeling results also show the slight western Litke current, a tendency to the appearance of the degenerate amphidrome with its center at the Vaigach Island and changes in tidal phases from 0 to 30° and from 330 to 0° in the adjacent parts of the Barents and Kara Seas, respectively.

Key words: three-dimensional model, stationary circulation, tides, Kara Gates Strait.

Пролив Карские Ворота представляет интерес по двум причинам. Во-первых, он интересен как объект исследований с теоретической точки зрения. Во-вторых, он является примером региона, в котором данные *in situ* измерений вертикальных смещений изотерм и результаты моделирования внутренних приливов (или внутренних приливных волн (ВПВ)) свидетельствуют о существовании экстремальных полусуточных ВПВ. По результатам моделирования [1], полученным в рамках двумерной (в вертикальной плоскости) модели генерации ВПВ, их амплитуды составляют порядка

50 м. Сомнения в адекватности приведенной оценки амплитуд ВПВ невольно возникают, как только они сравниваются с глубиной поднятия дна в прол. Карские Ворота. Принятая в [1] топография дна была заимствована из банка данных ЕТОРО-5. Если его заменить более современными банками данных ИВСаО, GEBCO или ЕТОРО-1, то минимальная глубина вдоль оси пролива будет меньше 50 м, так что амплитуды ВПВ в нем в принципе не могут быть равными указанному значению. Далее, цитируемые в [2] результаты *in situ* измерений были получены не над поднятием дна на оси пролива, а, если судить по схеме расположения буйковых станций, приведенной в [2], южнее оси пролива, в глубоководном канале с глубиной порядка 190 м. Мало того, из этих измерений следует, что максимальные полусуточные вертикальные смещения изотерм, характеризующие расстояние от гребня до подошвы волны, составляют около 70 м, что в пересчете дает 35-метровое значение амплитуды ВПВ. Причины увеличения амплитуд ВПВ с 35 до 50 м кроются, по всей видимости, в стремлении исполнителей работы [1] получить экстремальную оценку амплитуд ВПВ, происходящих на момент сизигии. Важно понять, какие амплитуды ВПВ встречаются в прол. Карские Ворота при средних (за сизигийно-квадратурный цикл) условиях.

Уместно напомнить, что в настоящее время имеются три главные, по нашему мнению, модели генерации ВПВ и вообще внутренних волн (ВВ). Согласно одной из них [3], наиболее интенсивная генерация происходит тогда, когда характеристический наклон этих ВВ или ВПВ совпадает с наклоном дна (условие критического наклона). Если амплитуды волн достаточно велики, волны могут дезинтегрироваться в пакеты высокоамплитудных уединенных волн, которые, как и поверхностные волны, подвержены эффектам дифракции и рефракции на нерегулярностях топографии дна. Распространяясь по мелководью, длины этих волн уменьшаются, их амплитуды увеличиваются и, в конечном счете, волны разрушаются.

В [4] было предположено, что, когда скорость приливного потока над порогом достаточно велика, ВВ с горизонтальным масштабом, приближающимся к масштабу порога, генерируются на стадии ускорения приливного потока. При этом они распространяются только вверх по потоку, усиливаясь в районе генерации, если внутреннее число Фруда F_r , определяемое как отношение придонной приливной скорости u к фазовой скорости n -й внутренней моды c_n , равно единице, т. е. $u/c_n = 1$.

Влияние фоновых течений и связанного с ними доплеровского сдвига частот на процесс генерации ВВ были рассмотрены в [5, 6]. Авторы этих работ показали, что в случае встречного течения, когда $U < 0$, и частоты генерируемых волн равны $-kU$ (здесь U — баротропная приливная скорость и k — горизонтальное волновое число ВВ), волны с горизонтальным масштабом, меньшим размера поднятия дна и названные нестационарными запрпятственными ВВ, существуют, когда безразмерный параметр kU_0/σ много больше единицы. Здесь U_0 — амплитуды баротропной скорости, σ/k — горизонтальная фазовая скорость ВВ и σ — приливная частота. Эти волны, как и ВВ, рассмотренные в [4], могут распространяться только в одном направлении (вверх по потоку), захватываясь в районе генерации и усиливаясь вследствие суперпозиции с нестационарными запрпятственными волнами. Напротив, при $kU_0/\sigma \ll 1$ генерируются ВПВ. Они могут распространяться в обоих направлениях, а их частоты остаются почти неизменными и близкими к приливной частоте. Наконец, при $kU_0/\sigma \approx 1$ генерируются ВВ с частотами $-kU \pm \sigma$. Соответственно (в зависимости от направления распространения) они имеют различные фазовые скорости и называются смешанными приливными запрпятственными волнами.

Мы будем иметь дело исключительно с ВПВ, которые могут быть отделены от других ВВ гидростатическим приближением. Подчеркнем, что использование этого приближения предопределяет характер предсказанных волн. Они могут быть только низкомодовыми (крупномасштабными). Высокомодовые (короткомасштабные) ВВ или ВПВ не воспроизводятся никакой гидростатической моделью. Следует иметь в виду еще одно: когда крупномасштабные ВВ идентифицируются с низкомодовыми волнами, а короткомасштабные ВВ — с высокомодовыми волнами, необходимо помнить об условности модового описания ВВ вблизи критической широты, где приливная и инерционная частоты совпадают, и уравнения движения, лежащие в основе описания волн, становятся, строго говоря, неадекватными.

Целью статьи было воспроизвести стационарную циркуляцию и поверхностные и внутренние приливы в прол. Карские Ворота, используя трехмерную конечно-элементную гидростатическую

модель QUODDY-4. Вынуждающая сила (forcing) определяется либо стационарными отклонениями уровня на открытых границах исследуемой области, либо приливными колебаниями уровня на тех же границах, либо линейной комбинацией этих двух возмущений. Конечная цель работы — понять, каковы амплитуды ВПВ в прол. Карские Ворота и как они зависят от присутствия стационарного потока.

Отдельные элементы модели QUODDY-4 и модель в целом были подробно описаны в [7—12]. Поэтому во избежание повторений, мы ограничимся изложением лишь специфических особенностей модели применительно к исследуемому району.

В данном случае задача решается в два этапа. На первом этапе рассматривается однородное море, на втором — стратифицированное море, причем модельные области в нестратифицированном и стратифицированном морях считаются совпадающими и охватывающими весь пролив. На его открытых границах приливные колебания берутся из результатов моделирования, полученных в [13] в рамках двумерной арктической приливной модели, ассимилирующей всю имеющуюся эмпирическую информацию о приливах, включая данные спутниковой альтиметрии. Для определения стационарных отклонений уровня на открытой границе исследуемой области использовался банк данных CNES-CLS09 средней глобальной топографии свободной поверхности [14]. В стратифицированном случае приливные колебания уровня на открытой границе дополняются радиационным граничным условием для всех канонических переменных, характеризующих решение с учетом того, что вычислительная фазовая скорость распространения сигнала достаточно велика. В результате принятое граничное условие сводится к условию равенства нулю нормальной производной от указанных переменных. Иными словами, косвенно предполагается, что ВПВ, ответственные за появление бароклиных возмущений скорости (они определяются как отклонения фактической скорости от средней по глубине (баротропной)), и вообще любые другие возмущения решения, если они генерируются внутри стратифицированной области, распространяются от очагов генерации к открытой границе. Вертикальный профиль частоты плавучести считается переменным в пространстве и во времени. Он определяется по климатическим данным, содержащимся в цифровом атласе Арктики [15], в начальный момент времени и рассчитывается по предсказываемым значениям температуры и солености морской воды в последующем.

Пролив Карские Ворота дискретизируется посредством неоднородной конечно-элементной сетки с разрешением, варьирующим от 0.5 км у берега до 2 км в открытой части пролива. В результате бароклиный радиус деформации Россби (или горизонтальный масштаб внутренних волн Кельвина), равный в прол. Карские Ворота 10.2 км, дискретизируется пятью конечными элементами. В вертикальной плоскости вводится отслеживающая топографию дна координата с 40 слоями переменной толщины и более подробным разрешением у дна. Временной шаг принимается равным 11.178 с, приливная частота — равной частоте гармоники M_2 приливного потенциала. Батиметрия задается по банку данных ИВСаО (рис. 1). Коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии рассчитываются по формуле Смагоринского [16]. Коэффициент сопротивления в придонном слое принимается равным 5×10^{-3} . Коэффициенты вертикальной турбулентной вязкости и диффузии оцениваются с использованием 2.5-уровневой схемы турбулентного замыкания [17].

В качестве начального состояния принимается условие покоя и отсутствия реликтовой турбулентности. Уравнения модели интегрируются до установления квазистационарного или квазипериодического режимов. Они считаются установившимися, когда относительные изменения во времени средних за приливный цикл плотностей баротропной и интегральной по глубине бароклиной энергии становятся равными 2 %. В зависимости от форсинга это условие выполняется по истечении разных промежутков времени. Для приливного форсинга время установления квазипериодического режима составляет 37 сут, для форсинга, обусловленного стационарными отклонениями уровня, — 25 сут и для их линейной комбинации — 33 сут. После того как квазипериодический режим установился, с помощью гармонического анализа находят средние значения, а также амплитуды и фазы приливных колебаний уровня и всех прочих параметров ВПВ.

Результаты моделирования представлены на рис. 2—9. Из рис. 2 видно, что прол. Карские Ворота характеризуется общим понижением уровня, достигающим наибольших значений (–24 см) в прилегающей части Карского моря и у северного берега пролива, и наименьших значений (до –12 см)

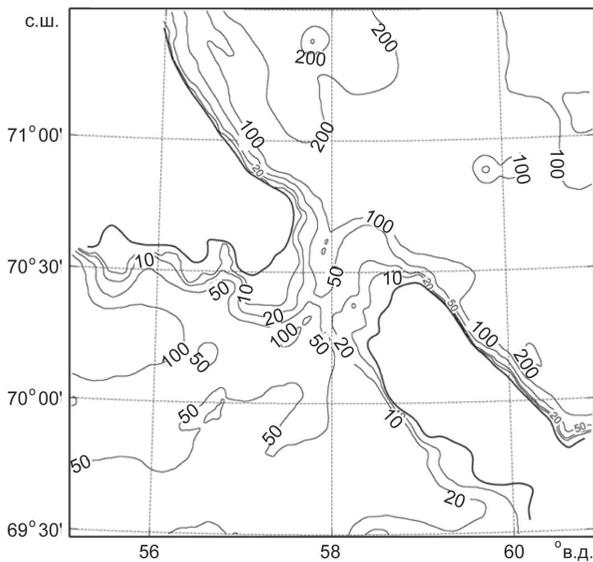


Рис. 1. Топография дна в прол. Карские Ворота по банку данных ИВСаО. Глубины даны в метрах.

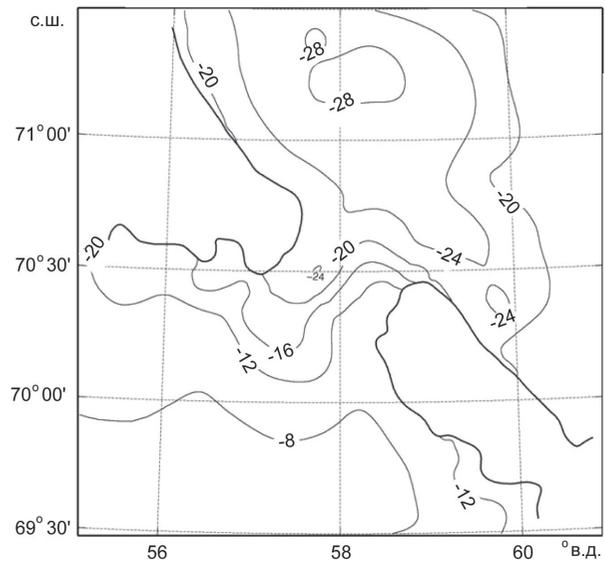


Рис. 2. Стационарные отклонения уровня в прол. Карские Ворота за счет перепада уровня на открытых границах исследуемой области, см.

в прилегающей части Баренцева моря и у южного берега пролива. Такое его распределение способствует развитию циклонической стационарной циркуляции в юго-западной части Карского моря и тенденции к образованию антициклонической циркуляции и усилению поверхностных течений в северной ее ветви в прилегающей части Баренцева моря (рис. 3, а). Результирующий стационарный поток массы из Баренцева моря в Карское на выходе из прол. Карские Ворота поворачивает на северо-восток и дает начало Ямальскому течению. Часть пролива, примыкающая к южному побережью о-вов Новая Земля, занята более слабым поверхностным течением Литке западного направления. В итоге стационарная поверхностная циркуляция в проливе вместе со стационарным потоком массы, ориентированным из Баренцева моря в Карское, имеет двухслойную (в горизонтальной плоскости) структуру. Интересно, что баротропные течения (рис. 3, б) в прол. Карские Ворота и его окрестностях имеют похожую структуру. Отсюда следует, что обратной циркуляции в глубинном слое здесь либо вообще нет, либо толщина слоя с обратной циркуляцией и скорости течения в нем малы. Такая структура средних течений и их направление из Баренцева моря в Карское согласуются с данными буйковых измерений [2]. О возможности существования слабого противотечения в придонном слое свидетельствуют данные измерений, полученные А. Д. Щербининым в 1997 г. с одного из буйев [2].

При задании чисто приливного форсинга амплитуды приливных колебаний уровня имеют совершенно иную, чем вызванные стационарными перепадами уровня, структуру и близкие с ними порядки величины

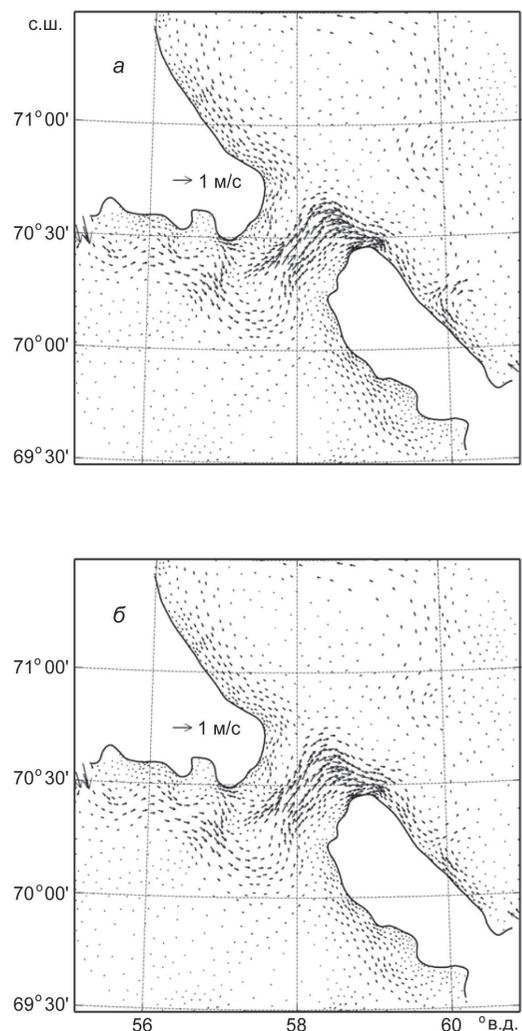


Рис. 3. Скорости поверхностного (а) и баротропного (б) постоянных течений при том же форсинге, что и на рис. 2.

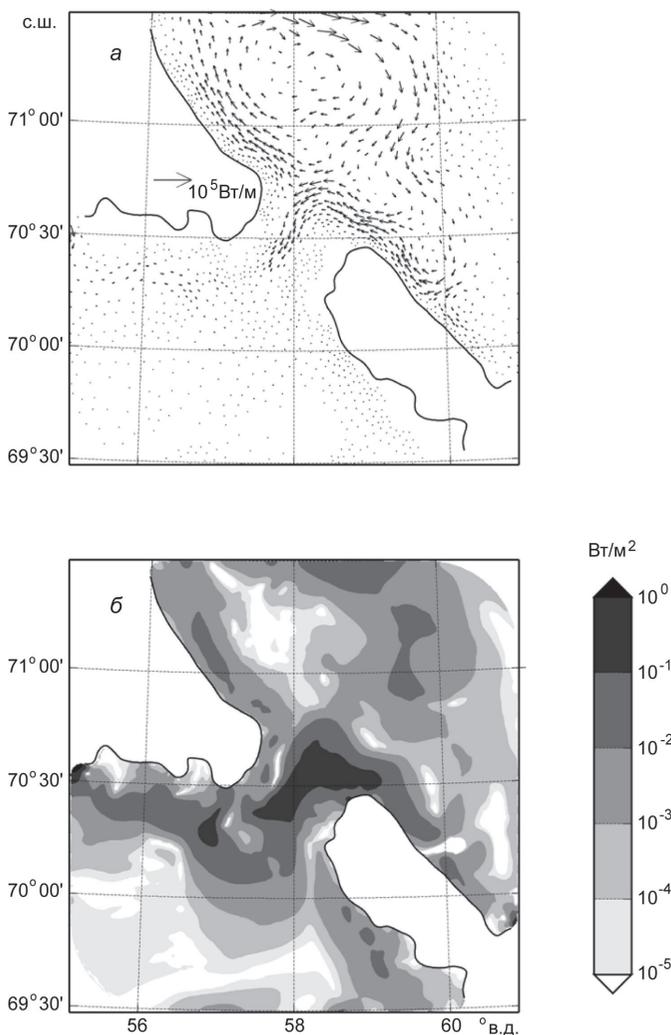


Рис. 4. Горизонтальный перенос (а) и диссипация (б) баротропной энергии при том же форсинге, что и на рис. 2.

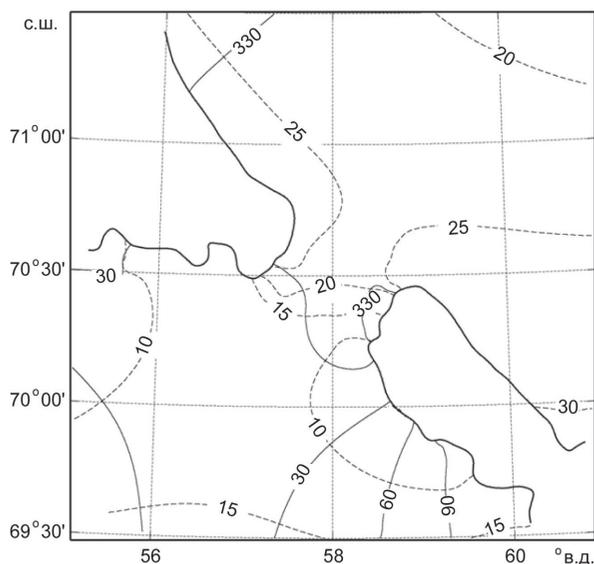


Рис. 5. Амплитуды (пунктир, см) и фазы (линии, градусы) приливных колебаний уровня при приливном форсинге.

(рис. 5, а). Амплитуды поверхностного прилива максимальны у восточного побережья о-вов Новая Земля и плавно уменьшаются на северо-восток. В прилегающей части Баренцева моря они максимальны, хотя и меньше по величине, в самом проливе, и минимальны на западе и востоке. Характерной особенностью поля фаз приливных колебаний уровня (рис. 5, б) является тенденция к образованию вырожденной амфидромии с центром на о. Вайгач. В остальной части Баренцева моря фазы изменяются от 0 до 30°, а в прилегающей части Карского моря — от 330 до 0°.

Из-за сужения в проливе максимальные скорости поверхностного приливного течения возрастают в самом проливе и в восточной части Баренцева моря (рис. 6, а). Здесь годографы скорости имеют явно выраженную эллиптическую форму с тенденцией к вырождению эллипсов в прямые линии в окрестности о. Вайгач. В остальной части Баренцева моря, как и в Карском море, максимальные скорости поверхностных приливных течений не достигают 10 см/с, а эллипсы преобразуются в прямые линии. Исключение представляет собой только северо-восточная окраина Карского моря, где максимальная скорость приливных течений вновь увеличивается до 20 см/с, и эллипсы скорости принимают привычную форму. Аналогичное пространственное распределение имеют и баротропные скорости (рис. 6, б). В самом проливе эллипсы баротропной скорости совпадают с измеренными на буях [2] и полученными по данным спутниковой альтиметрии [18], [2].

Вертикальное распределение амплитуд приливных колебаний изопикн, максимальных бароклинических скоростей, плотности средней за приливный цикл бароклинической приливной энергии и средней локальной скорости диссипации бароклинической приливной энергии изображены на рис. 7, а—г. Видно, что ВПВ в районе прол. Карские Ворота имеют захваченный характер, что их амплитуды в районе поднятия дна составляют 16 м, что максимальная приливная скорость в глубинном слое увеличивается ко дну и меняет свое направление на обратное, и что, наконец, средняя локальная скорость диссипации растет с уменьшением расстояния

от дна. Примечательно и то, что максимальные амплитуды ВПВ детектируются там, где ВПВ распространяются навстречу стационарному потоку. Этот результат подтверждается данными наблюдений [2].

Средний за приливный цикл горизонтальный волновой перенос баротропной приливной энергии, определяемый как интегральное по глубине произведение баротропной скорости на отклонение давления от его статического значения, создает в юго-западной части Карского моря циклонический круговорот (рис. 8, *a*), южная ветвь которого инициирует горизонтальный волновой перенос баротропной приливной энергии. Этот перенос направлен из Карского моря в Баренцево, тем самым ставя под сомнение бытующее сейчас мнение (см., например, [19]) о направлении переноса из Баренцева моря в Карское, аналогичное тому, которое свойственно стационарному потоку массы вследствие перепада уровня. Подобным образом ведет себя и средняя за приливный цикл диссипация баротропной приливной энергии (рис. 8, *b*). Она максимальна (до 10^{-1} Вт/м²) в самом проливе и варьирует между 10^{-4} и 10^{-2} Вт/м² на юге и востоке прилегающей части Баренцева моря. В остальных районах исследуемой области она еще меньше (10^{-5} — 10^{-3} Вт/м²). Заметим, что средние значения интегральных по глубине горизонтального волнового переноса и диссипации бароклинной приливной энергии (не показаны) имеют одинаковые порядки величины с одноименными характеристиками бюджета баротропной приливной энергии (рис. 4, *a*, *b*).

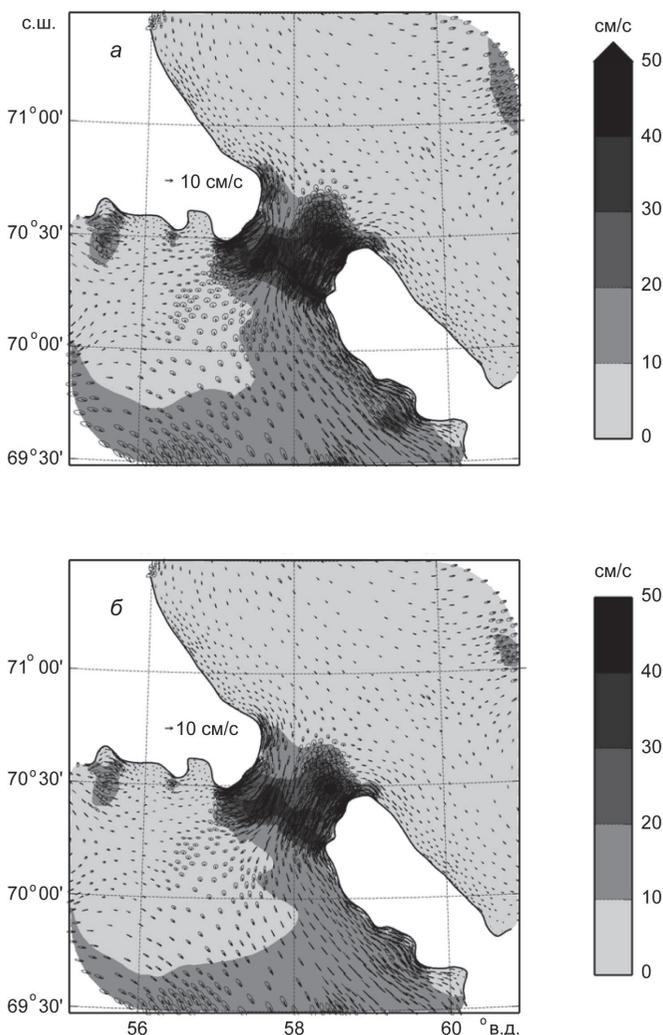
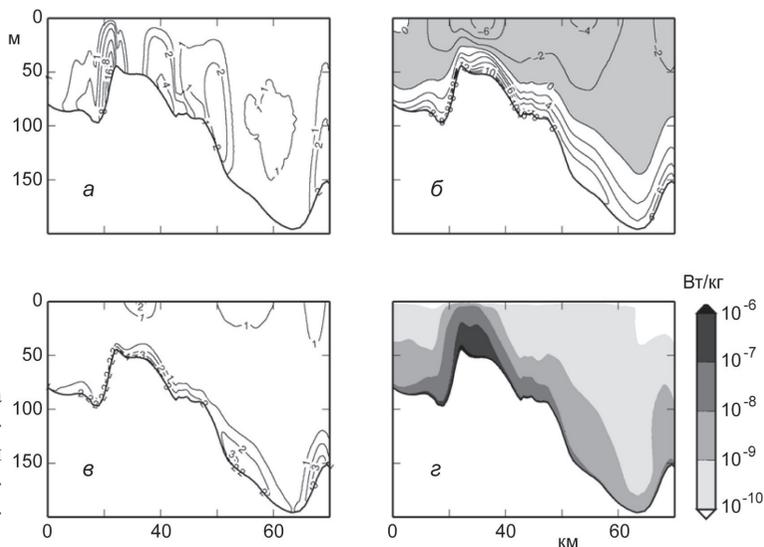


Рис. 6. Эллипсы скорости поверхностного (*a*) и баротропного (*b*) приливных течений при том же форсинге, что и на рис. 5.

Поверхностные и баротропные приливные течения отличаются так же, как и в стационарном потоке.

Рис. 7. Вертикальные распределения вдоль оси пролива амплитуд ВПВ, м (*a*), максимальных бароклинных скоростей, см/с (*b*), средних за приливный цикл значений плотности, Дж/м³ (*в*) и скорости диссипации, Вт/кг (*г*) бароклинной приливной энергии при том же форсинге, что и на рис. 5.

Ось пролива ориентирована с юго-запада на северо-восток; подобласть с максимальными скоростями, направленными на юго-запад, затенена, подобласть с максимальными скоростями противоположного направления — нет.



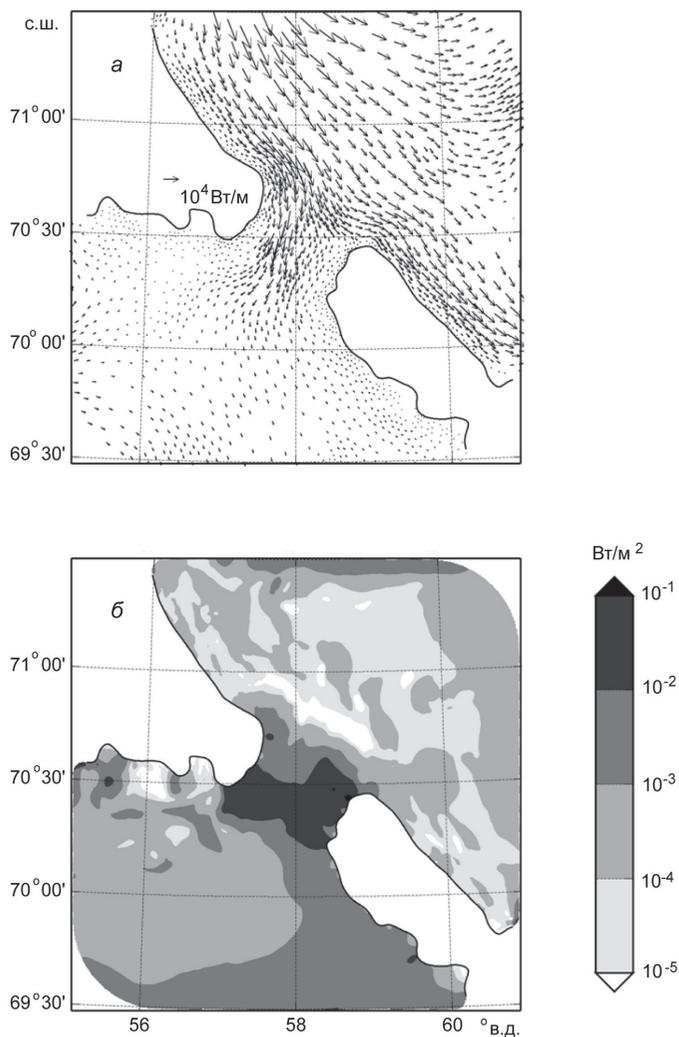


Рис. 8. Средние за приливный цикл значения горизонтального волнового переноса (а) и диссипации (б) баротропной приливной энергии при том же форсинге, что и на рис. 5.

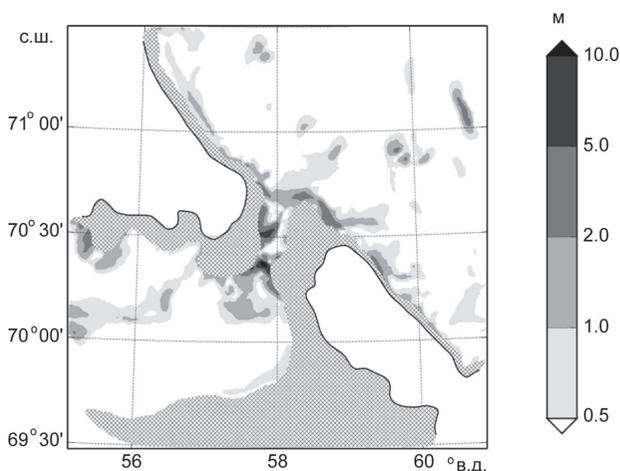


Рис. 9. Амплитуды ВПВ на глубине пикноклина в прол. Карские Ворота при комбинированном форсинге, м.

Амплитуды ВПВ на глубине пикноклина (40 м), отвечающие комбинированному форсингу (стационарные отклонения плюс приливные колебания уровня), представлены на рис. 9. Легко видеть, что поле амплитуд имеет пятнистую структуру. Значения амплитуд ВПВ достигают 10 м в проливе по обе стороны от подводного хребта для средних (за сизигийно-квадратурный цикл) условий. Такие же амплитуды ВПВ были зарегистрированы при буксировке зонда в момент, когда приливы не были сизигийными [20]. Они встречаются также в отдельных пятнах в окрестности южного побережья о-вов Новая Земля, у восточного побережья о. Вайгач и в юго-западной части Карского моря. Таким образом, полученные амплитуды ВПВ в несколько раз меньше представленных в [1] для сизигийных условий. Расхождения между амплитудами ВПВ по приведенным в [1] и нашим результатам моделирования могут быть связаны с использованием разных астрономических условий в течение сизигийно-квадратурного цикла. Отметим также некоторое усиление ВПВ там, где они направлены навстречу набегающему стационарному потоку из Баренцева моря в Карское, — факт, подтверждаемый данными наблюдений [20].

В заключение перечислим основные итоги работы. Со всей определенностью они указывают на то, что при средних (за сизигийно-квадратурный цикл) условиях амплитуды ВПВ над поднятием дна в проливе составляют 10—16 м, причем максимальные амплитуды наблюдаются там, где ВПВ распространяются навстречу стационарному потоку. Что касается стационарного потока, то он ориентирован из Баренцева моря в Карское, в направлении, обратном поверхностному течению Литке, обнаруживаемому у южной оконечности о-вов Новая Земля. Иначе обстоит дело при чисто приливном форсинге. Его задание влечет за собой образование вырожденной амфидромии с центром на о. Вайгач и изменение фаз поверхностного прилива в пределах от 0 до 30° и от 330 до 0° в прилегающих частях Баренцева и Карского морей соответственно.

Литература

1. Морозов Е. Г., Писарев С. В., Ерофеева С. Ю. Внутренние волны в арктических морях России // Поверхностные и

- внутренние волны в Северном Ледовитом океане / Под ред. И. В. Лавренова, Е. Г. Морозова. СПб.: Гидрометеоздат, 2002. С. 217—234.
2. *Morozov E. G., Parrilla-Barrera G., Velarde M. G., Scherbinin A. D.* The straits of Gibraltar and Kara Gates: a comparison of internal tides // *Oceanologica Acta*. 2003. V. 26. P. 231—241.
 3. *Baines P. G.* On internal tide generation models // *Deep-Sea Res.* 1982. V. 29. P. 307—328.
 4. *Hibiya T.* Generation mechanism of internal waves by tidal flow over a sill // *J. Geophys. Res.* 1986. V. 91. P. 7697—7708.
 5. *Nakamura T., Awaji T.* The generation of large-amplitude unsteady lee waves by subinertial K1 tidal flow: a possible vertical mixing mechanism in the Kuril Straits // *J. Phys. Oceanogr.* 2000. V. 30, N. 7. P. 1601—1621.
 6. *Nakamura T., Awaji T.* A growth mechanism for topographic internal waves generated by an oscillatory flow // *J. Phys. Oceanogr.* 2001. V. 31, N. 8. P. 2511—2524.
 7. *Lynch D. R.* Three-dimensional diagnostic model for baroclinic, wind-driven and tidal circulation in shallow seas. FUNDY-4 User's Manual. Dartmouth College, Hanover, New Hampshire, Report Number NML-90-2, 1990. 23 p.
 8. *Lynch D. R., Gray W. G.* A wave equation model for finite element tidal computations // *Computers and Fluids*. 1979. V. 7. P. 207—228.
 9. *Lynch D. R., Werner F. E.* Three-dimensional hydrodynamics on finite elements. Part 1: Linearized harmonic model // *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*. 1987. V. 7. P. 871—909.
 10. *Lynch D. R., Werner F. E.* Three-dimensional hydrodynamics on finite elements. Part 2: Nonlinear time-stepping model // *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*. 1991. V. 12. P. 507—533.
 11. *Lynch D. R., Werner F. E., Greenberg D. A., Loder J. W.* Diagnostic model for baroclinic and wind-driven circulation in shallow seas // *Cont. Shelf Res.* 1992. V. 12. P. 37—64.
 12. *Ip J.T.C., Lynch D. R.* QUODDY-3 User's Manual: Comprehensive coastal circulation simulation using finite elements: Nonlinear prognostic time-stepping model. Thayer School of Engineering, Dartmouth College, Hanover, New Hampshire, Report Number NML-95-1, 1995.
 13. *Padman L., Erofeeva S.* A barotropic reverse tidal model for the Arctic Ocean // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L02303, doi: 10.1029/2003GL019003.
 14. *Rio M. H., Guinehut S., Larnicol G.* New CNES-CLS09 global mean dynamic topography computed from the combination of GRACE data, altimetry, and in situ measurements // *J. Geophys. Res.* 2011. V. 116. C07018, doi: 10.1029/2010JC006505.
 15. Joint US-Russian Atlas of the Arctic Ocean. Oceanography Atlas for the summer period / Ed. by E. Tanis, L. Timokhov. Environmental Working Group, University of Colorado, Media Digital. doi: 10.7265/N5H12ZX4.
 16. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations // *Month. Wea. Rev.* 1963. V. 91. P. 99—164.
 17. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. of Geophys. Space Phys.* 1982. V. 20. P. 851—875.
 18. *Egbert G., Erofeeva S.* Efficient inverse modeling of barotropic ocean tides // *Atmos. Ocean Technol.* 2002. V. 19, N. 2. P. 183—204.
 19. *Pavlov V. K., Pfirman S. L.* Hydrographic structure and variability of the Kara Sea: Implications for pollutant distribution // *Deep-Sea Res. II*. 1995. V. 42. N. 6. P. 1369—1390.
 20. *Morozov E. G., Paka V. T., Bakhanov V. V.* Strong internal tides in the Kara Gates Strait // *Geophys. Res. Lett.* 2008. V. 35. N. 16. L16603.

Статья поступила в редакцию 01.11.2014 г.

УДК 551.465

© Е. Г. Морозов

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН

egmorozov@mail.ru

Внутренние приливы и течения в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах

Сравниваются измерения течений и температуры на буйках в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах. В обоих проливах вертикальные смещения, вызванные полусуточными внутренними волнами, исключительно велики и в значительной степени подобны. Оба пролива характеризуются сильными двухслойными постоянными течениями противоположных направлений. Гидрологические режимы Гибралтарского и Баб-эль-Мандебского проливов весьма схожи. Каждый пролив соединяет внутреннее море с океаном. В обоих морях происходит сильное испарение, и оба моря получают мало пресной воды за счет стока рек. Испарение компенсируется притоком воды из океанов. За счет испарения в морях более соленая и плотная вода опускается в глубоководную часть и затем встречным течением вытекает через проливы в океан. На эту систему течений накладывается волна баротропного прилива, который генерирует внутреннюю приливную волну при обтекании течениями седловин поперечных хребтов в проливах. Внутренние приливы вблизи поперечных хребтов в проливах характеризуются амплитудами вертикальных смещений до 160—200 м. Внутренние приливы распространяются в обе стороны от хребтов, резко теряя свою энергию. Внутренний прилив возникает на фоне двухслойного течения, что усиливает амплитуду внутренних волн. Амплитуды внутренних приливов, распространяющихся против среднего потока усиливаются за счет сокращения длины волны.

Ключевые слова: внутренний прилив, течения, разнонаправленные потоки.

E. G. Morozov

P. P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow, Russia

egmorozov@mail.ru

Internal Tides and Currents in the Gibraltar and Bab-el-Mandeb Straits

We compare moored measurements of currents and temperature in the Gibraltar and Bab-el-Mandeb straits. In both straits the vertical displacements caused by semidiurnal internal waves are extremely high. Both straits are characterized by permanent strong two-layer currents of opposing directions. The hydrological regimes of the Gibraltar and Bab-el-Mandeb straits are very similar. Each strait connects an inland sea with the ocean. Strong evaporation exists in both seas and the runoff of fresh water by rivers is small in both seas. Evaporation is compensated by the surface flow of water from the ocean. Due to evaporation in the seas the saltier and dense water descends to the deep layers of the seas and then flows to the ocean as a bottom current of the opposite direction to the surface flow. A barotropic tidal wave is superimposed on this current system and generates a tidal internal wave during the flow of the currents over the sills in the straits. Internal tides near the sills are characterized by the amplitudes of vertical displacements that reach 160—200 m. Internal tides propagate to both sides of the sills rapidly losing their energy. Internal tide is generated over the background of two-layer shear current, which intensifies the amplitude of internal waves. The amplitudes of internal tides propagating opposite to the mean flow intensify due to the decrease in the wave length.

Key words: internal tide, currents, oppositely directed flows.

Гидрологические режимы Гибралтарского и Баб-эль-Мандебского проливов имеют много общего. Каждый из них соединяет внутреннее море с океаном. Гибралтарский пролив соединяет Средиземное море с Атлантическим океаном, а Баб-эль-Мандебский соединяет Красное море

с Индийским океаном. В обоих морях происходит сильное испарение, и оба моря получают мало пресной воды за счет стока рек. Испарение компенсируется притоком воды из океанов. За счет испарения в морях более соленая и плотная вода опускается в глубоководную часть и затем встречным течением вытекает через проливы в океан [1, 2].

На эту систему течений накладывается волна баротропного прилива, который генерирует внутреннюю приливную волну при обтекании течениями неровностей топографии, в особенности над подводными хребтами, которые пересекают проливы [3]. В Гибралтарском проливе это хребет Камаринал, а в Красном море седловина хребта Ханиш около острова Перим [1, 4, 5].

Длина Гибралтарского пролива 65 км, его минимальная ширина 14 км, минимальная глубина над хребтом Камаринал 340 м [6]. Минимальная ширина Баб-эль-Мандебского пролива 26 км. Пролив разделен островом Перим на две части. Восточная часть пролива шириной 3 км мелководная. Минимальная глубина в районе седловины Ханиш около 180 м [7].

В 1985 и 1986 гг. в Гибралтарском проливе был проведен эксперимент по измерению течений на буйках. Было установлено более 10 буйев, на каждом из которых имелись измерители течений, давления и температуры Aandera [4, 8]. В 1994—1995 гг. в проливе был проведен эксперимент World Ocean Circulation Experiment (WOCE) полигон АСМ9 с измерениями течений на буйковых станциях, а на дне устанавливались акустические доплеровские измерители скорости ADCP, смотрящие вверх.

В 1994—1996 гг. в Баб-эль-Мандебском проливе был проведен эксперимент WOCE по измерению течений на буйках. Измерители течений давления и температуры Aandera и Seacat устанавливались на притопленных буйковых станциях, а на дне устанавливались акустические доплеровские измерители скорости ADCP, смотрящие вверх [9, 10]. Данные измерений взяты из базы данных эксперимента WOCE свободного доступа. Дискретность данных 1 ч.

Карты проливов и точки установки буйев показаны на рис. 1.

Течения. После обработки данных измерителей течений ADCP в Гибралтарском проливе получены скорости в слоях толщиной 10 м по всей глубине. Поток из океана в Средиземное море в верхнем слое пролива, который компенсирует испарение, характеризуется скоростями до 40 см/с. Поток обращается в ноль на глубине около 130 м. Нижнее течение из моря в океан характеризуется еще большими скоростями до 85 см/с. Максимум скорости находится около дна. Вертикальный профиль горизонтальной скорости показан на рис. 2, а.

В Баб-эль-Мандебском проливе по данным ADCP получены скорости в слоях толщиной 10 м. Поток из океана в Красное море в верхнем слое пролива, который компенсирует испарение, характеризуется скоростями до 40 см/с. Поток обращается в ноль на глубине около 100 м. Нижнее течение из моря в океан характеризуется скоростями до 80 см/с и занимает весь слой от глубины 100 м до дна. Максимум скорости находится на глубине 150—160 м. Максимальная глубина пролива в районе седловины близка к 220 м. Надо иметь в виду, что в глубинных слоях ширина пролива уменьшается и на глубине 150 м равна 8 км. В связи с этим скорость потока в глубинной части пролива выше, чем

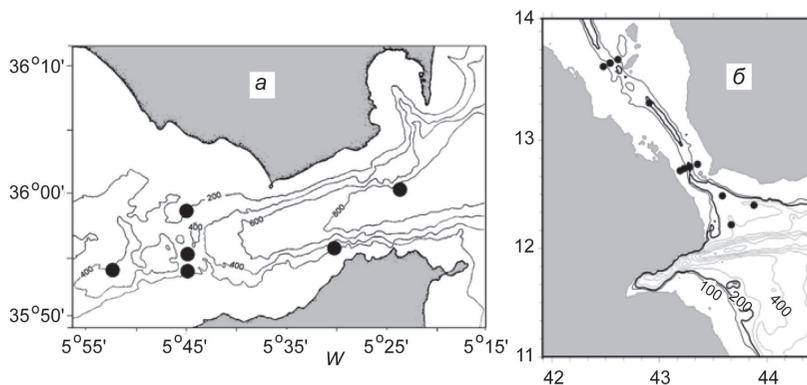


Рис. 1. Карты проливов Гибралтарского (а) (изобаты 200, 400, 600 и 800 м) и Баб-эль-Мандебского (б) (изобаты 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 м). Черные точки показывают положения буйев.

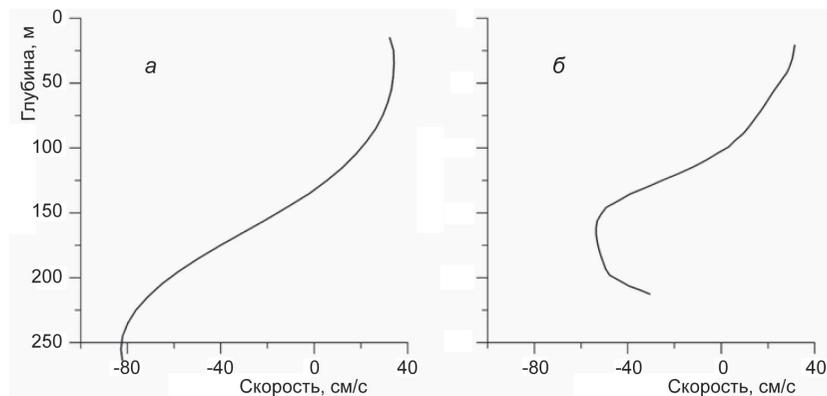


Рис. 2. Вертикальные профили горизонтальных течений в Гибралтарском (а) и Баб-эль-Мандебском (б) проливах. Положительные значения — течения на восток в Гибралтарском проливе и юго-восток (азимут 150°) в Баб-эль-Мандебском проливе.

в верхней. Около дна скорость опять уменьшается. Вертикальный профиль горизонтальной скорости показан на рис. 2, б.

В работах [4, 11] были опубликованы ранее полученные результаты о течениях и волнах в Баб-эль-Мандебском и Гибралтарском проливах.

Спектры и вертикальные смещения. Спектральные плотности флуктуаций температуры и вертикальных смещений рассчитывались по измерениям температуры с дискретностью 1 ч. В Гибралтарском проливе (рис. 3, а) доминирует полусуточный прилив. Амплитуды (отклонения от среднего) вертикальных смещений на частоте внутреннего прилива M2 составляют около 69 м, а амплитуды других компонент внутреннего прилива (S2, K1, O1) в два-три раза меньше. Суммарные вертикальные отклонения превышают в максимуме 100 м. Эти колебания связаны с внутренними волнами, генерированными около хребта Камаринал, пересекающего Гибралтарский пролив. Амплитуды волн уменьшаются с расстоянием от хребта Камаринал и на расстоянии около 50 км от хребта становятся в три раза меньше, чем над хребтом. Энергия внутренних приливов передается внутреннему бору и перемешиванию. Сдвиг скорости, образованный двумя противоположно направленными течениями, усиливает внутренний бор и внутренние волны в верхнем слое.

В Баб-эль-Мандебском проливе присутствуют и суточный, и полусуточный приливы (рис. 3, б) [12]. На спектрах колебаний течений и температуры имеются пики с высокой достоверностью на периодах 24.0 и 12.4 ч. Преобладают суточные внутренние приливные волны. На спектрах температуры появляются обертоны на периодах 8.2 и 6.2 ч. Амплитуда волн полусуточного периода (вертикальное смещение частиц воды) на седловине Ханиш около острова Перим (широта $12^\circ 30'$) оценена как 80 м, а на северной группе буев (широта $13^\circ 30'$) как 20 м. Затухание волн аналогично

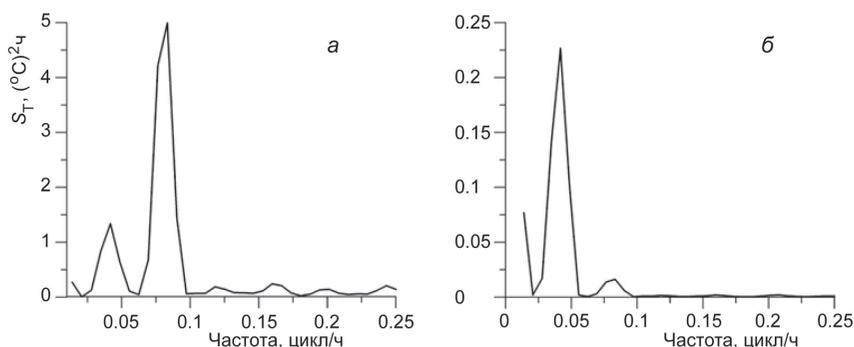


Рис. 3. Спектры флуктуаций температуры в Гибралтарском (а) (буй на хребте Камаринал, горизонт измерений 153 м, глубина 321 м) и Баб-эль-Мандебском (б) (буй над хребтом Ханиш, горизонт измерений 117 м при глубине 162 м) проливах.

затуханию в Гибралтарском проливе, где на расстоянии около 50 км от хребта их амплитуда уменьшается в три раза.

Пространственно-временной спектр для полусуточных волн. Мы применили антенный метод, чтобы вычислить длину волны и направление полусуточных внутренних волн. Этот сейсмологический метод был применен Барбером к океанским волнам [13]. Допускается произвольное расположение датчиков. Сначала производится расчет взаимных спектров для каждой пары возможных комбинаций датчиков с последующей сверткой на частоте изучаемой волны (период 12.4 ч). Затем, амплитуды и фазы ко-спектра и квадратурного спектра используются для расчета пространственно-временного спектра на частоте изучаемой волны, чтобы оценить горизонтальное волновое число. Используется статистическая разность фаз между каждыми двумя парами датчиков. Мы использовали датчики температуры, которые отражают вертикальные движения, связанные с внутренними волнами. При расчете важно, чтобы расстояния между датчиками были сравнимы с длиной изучаемых волн, но расстояния между соседними датчиками не превышали длины волны, иначе возникает неопределенность в интерпретации разностей фаз. Если расстояние между датчиками слишком мало, а размах антенны буев также мал, то определения длины волны будут неточными. Обычно число датчиков мало и спектр получается не дельтообразный, а пик спектра, соответствующий волновому числу, оказывается размытым. Пространственно-временные спектры для определенной частоты представляют в виде изолиний от максимума спектра в процентах.

Расчет пространственно-временного спектра для полусуточной частоты выполнялся по следующей формуле:

$$E(k_x, k_y, f_0) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[P_{ij}(f_0) \cos 2\pi(k_x x_{ij} + k_y y_{ij}) - Q_{ij}(f_0) \sin 2\pi(k_x x_{ij} + k_y y_{ij}) \right],$$

где $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ — пространственное волновое число, а длина волны $L = 1/k$; i, j — последовательные номера датчиков; n — общее число датчиков; P_{ij} и Q_{ij} — действительная и мнимая части взаимного спектра между датчиками с номерами i и j ; $x_{ij} = X_i - X_j$ и $y_{ij} = Y_i - Y_j$ — проекции расстояний между датчиками на горизонтальные оси x и y .

Поскольку считалось, что основная генерация внутреннего прилива происходит над хребтом Камаринал, буйковые станции в Гибралтарском проливе были разделены на восточную и западную группы. Длина волны, рассчитанная на основе 10 различных комбинаций реализаций на буях западной группы (с учетом выборки в разные периоды времени) изменяется от 45 до 60 км, тогда как направление меняется от 210 до 280°. Длина волны, оцененная по 16 различным комбинациям пространственного расположения буев и временных интервалов в восточной группе буев, изменяется от 90 до 140 км (среднее 110 км), а генеральное направление распространения на восток меняется от 90 до 120°.

Длина волны внутреннего прилива, оцененная по дисперсионному соотношению, к востоку от хребта равна 94 км (фазовая скорость 2.1 м/с), а к западу от хребта длина волны равна 59 км (фазовая скорость 1.3 м/с). Мы приняли, что средняя глубина к востоку от хребта равна 800 м, а к западу от хребта равна 500 м.

В Баб-эль-Мандебском проливе расчет производился для треугольника буев в южной части пролива на горизонте измерений около 400 м при глубине океана более 500 м, увеличивающейся на юго-восток. По данным расчета направление волн 150°, длина волны 80 км. Эти волны можно интерпретировать как внутренние полусуточные волны, генерированные на седловине подводного хребта между Азией и Африкой в проливе около острова Перим.

Обсуждение. Анализ данных измерений течений и температуры на буях в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах показывает, что амплитуды полусуточных внутренних волн в этих районах очень велики. Вертикальные смещения частиц воды, вызванные совместным действием различных внутренних приливных волн над поперечными хребтами, достигают 200 м в Гибралтарском проливе. В Баб-эль-Мандебском проливе они несколько меньше (160 м), но все равно очень большие. Внутренние приливы в обоих проливах генерируются одним и тем же физическим механизмом: обтеканием течений баротропного прилива седловины поперечных хребтов. Волны

распространяются вдоль проливов в стратифицированном потоке, который изменяет свойства волн. Интенсивные средние течения — это другая общая характерная черта обоих проливов.

Внутренний прилив захватывает всю толщу вод. В Гибралтарском проливе максимум первой моды располагается в нижнем течении, вытекающем из Средиземного моря. Внутренний прилив интенсифицируется при распространении в восточном направлении, поскольку он распространяется против течения из моря. Взаимодействие с течением сокращает длину волны и концентрирует волновую энергию на меньшем пространственном масштабе, вследствие чего амплитуда волн возрастает. Это приводит к нелинейным трансформациям и обрушению внутреннего прилива и формированию внутреннего бора на пикноклине, проявления которого видны на поверхности океана [4, 6]. В восточной части пролива пикноклин располагается ближе к поверхности, чем в западной части пролива. В западной части пролива волна распространяется в том же направлении, что и поток из Средиземного моря. Поэтому длина волны увеличивается, а амплитуда уменьшается. Пикноклин расположен глубже, чем на востоке, и поверхностные проявления внутренних волн слабее.

Аналогичные процессы происходят и в Баб-эль-Мандебском проливе. За счет сильного испарения с поверхности уровень моря поддерживается поверхностным течением из Индийского океана. Более плотная соленая вода вытекает нижним течением из Красного моря в океан. Приливные течения возбуждают интенсивные внутренние приливы суточного и полусуточного периода в районе поперечного хребта Ханиш около острова Перим.

В заключение заметим, что пролив Карские Ворота характеризуется гидрологическим режимом, похожим на проливы, рассмотренные выше [14].

Выводы. Интенсивные внутренние волны, наблюдаемые в Гибралтарском и Баб-эль-Мандебском проливах, генерируются при обтекании течениями баротропного прилива седловин поперечных хребтов в проливах.

Анализ данных показывает, что внутренние приливы вблизи поперечных хребтов в проливах характеризуются амплитудами вертикальных смещений до 160—200 м, что лишь немногим меньше, чем глубина пролива. Внутренние приливы распространяются в обе стороны от хребтов, резко теряя свою энергию. Внутренний прилив возникает на фоне двухслойного течения, что усиливает амплитуду внутренних волн. Амплитуды внутренних приливов, распространяющихся против среднего потока, усиливаются за счет сокращения длины волны.

Литература

1. Bower A. S., Hunt H. D., Price J. F. Character and dynamics of the Red Sea and Persian Gulf outflows // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105, N. C3. P. 6387—6414.
2. Bryden H. L., Candela J., Kinder T. H. Exchange through the Strait of Gibraltar // *Prog. Oceanogr.* 1994. V. 33. P. 201—248.
3. Hibiya T. Generation mechanism of internal waves by a vertically sheared tidal flow over a sill // *J. Geophys. Res.* 1990. C, 95. P. 1757—1764.
4. Morozov E. G., Trulsen K., Velarde M. G., Vlasenko V. I. Internal tides in the Strait of Gibraltar // *J. Phys. Oceanogr.* 2002. V. 32. P. 3193—3206.
5. Watson G. Internal waves in a stratified shear flow: The Strait of Gibraltar // *J. Phys. Oceanogr.* 1994. V. 24. P. 509—517.
6. Lacombe H., Richez C. The regime of the Strait of Gibraltar // *Hydrodynamics of Semi-Enclosed Seas* / Ed. J.C.J. Nihoul. Amsterdam: Elsevier, 1982. P. 13—74.
7. Murray S. P., Johns W. Direct observations of seasonal exchange through the Bab el Mandab Strait // *Geophysical Research Letters.* 1997. V. 24(21). P. 2557—2560.
8. Kinder T. H., Bryden H. L. The 1985-1986 Gibraltar experiment: Data Collection and preliminary results // *EOS Trans. AGU.* 1987. V. 68. P. 786—787, 793—795.
9. Smeed D. A. Seasonal variation of the flow in the Strait of Bab el Mandeb // *Oceanologica Acta.* 1997. V. 20. P. 773—781.
10. Smeed D. A. Exchange through the Bab el Mandab // *Deep-Sea Research II.* 2004. V. 51. P. 455—474.
11. Морозов Е. Г. Внутренние приливы в Баб-эль-Мандебском проливе // *Труды Нижегородского государственного университета.* 2013. № 3. С. 32—36.
12. Jarosz E., Blain C. A., Murray S. P., Inoue M. Barotropic tides in the Bab el Mandab Strait, numerical simulations // *Continental Shelf Research.* 2005. V. 25. P. 1225—1247.
13. Barber N. F. The directional resolving power of an array of wave detectors // *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall. 1963. P. 137—150.
14. Morozov E. G., Parrilla-Barrera G., Velarde M. G., Scherbinin A. D. The Straits of Gibraltar and Kara Gates: A Comparison of Internal Tides // *Oceanologica Acta.* 2003. V. 26(3). P. 231—241.

Статья поступила в редакцию 10.02.2015 г.

Поздравляем!



**Поздравляем с юбилеем
Ефима Наумовича Пелиновского!**

12 июля 2015 г.
известному российскому гидрофизику,
ученому с мировым именем,
одному из наиболее часто цитируемых авторов России
Ефиму Наумовичу Пелиновскому
исполнилось 70 лет.

За многие годы работы Ефим Наумович прошел путь от техника-электрика до главного научного сотрудника, профессора. В 1963 г. он с отличием окончил Дзержинский электро-механический техникум, работал на химическом заводе в Дзержинске, а в 1969 г. также с отличием окончил Горьковский государственный университет им. Лобачевского. После окончания аспирантуры работал в Научно-исследовательском радиофизическом институте (1972—1977), а с 1977 г. и по настоящее время — в Институте прикладной физики РАН. Ефим Наумович Пелиновский — главный научный сотрудник отдела нелинейных геофизических процессов, профессор, доктор физико-математических наук, автор почти двух десятков книг и более чем шестисот статей.

Основные научные достижения Ефима Наумовича связаны с разработкой физико-математических моделей волновых процессов и их применением в прогнозировании морских природных катастроф. Он удостоен Государственной премии России (1997) за разработку методов, позволивших изучить особенности генерации, распространения, трансформации и диссипации нелинейных волн в неоднородных и случайных средах. За работы по дистанционным методам изучения океана Е. Н. Пелиновский награжден отечественной медалью «За трудовую доблесть» (1985).

На сегодняшний день профессор Пелиновский является одним из ведущих мировых ученых в области поверхностных и внутренних волн. Он одним из первых ввел в мировое научное сообщество термин «волны-убийцы» и явился основоположником разработок различных теоретических моделей генерации таких волн на поверхности океана. Большой популярностью среди ученых всего мира пользуется книга о волнах-убийцах, написанная Ефимом Наумовичем совместно с российским ученым А. В. Слюняевым и французским профессором К. Харифом.

Кроме того, Ефим Наумович разработал модели цунами, позволившие предложить схему цунами-районирования Тихоокеанского побережья России. Он принимал участие в исследованиях катастрофических землетрясений и цунами на Курильских островах (1972—1994), в Корее (1993), Индонезии (1996 и 2004), Монтсеррате (2003), Гваделупе (2004) и анализе рисков, связанных с цунами для ряда стран. Ефим Наумович Пелиновский является членом международной и российской комиссий по цунами, а также членом международной группы экспертов по цунами. Его работы по этой проблеме удостоены международных премий: W. Adams Award (1993) от Международного общества по изучению стихийных бедствий и премией Международного общества цунами (2012).

За выдающийся вклад в исследование морских природных катастроф в 2006 г. Е. Н. Пелиновский был награжден престижной медалью С. Соловьева от Европейского Геофизического Союза. На протяжении десяти лет Е. Н. Пелиновский работал секретарем Европейского геофизического союза по морским природным катастрофам. С 1995 г. он является членом редколлегии журнала «Natural Hazards», с 2008 г. — главным редактором «Open Oceanography Journal»,

Поздравляем!

а с 2009 г. — членом редколлегии журналов «Фундаментальная и прикладная гидрофизика» РАН и «Известия РАН», серия «Физика атмосферы и океана».

В последние годы профессор Пелиновский занимается сверхдальним распространением морских и акустических волн в плазме. Например, развивает предложенную им ранее теорию наката волн на берег, а также занимается исследованием водного бассейна Нижегородской области. Под его руководством разработан ряд сценариев прогноза аварийных экологических ситуаций на реках Ока и Волга.

Наряду с научными разработками, Ефим Наумович ведет и активную педагогическую работу, являясь профессором на кафедре «Прикладная математика» Нижегородского государственного технического университета (с 1984 г.) и в Высшей школе экономики. Под его руководством защищено 20 кандидатских диссертаций, в том числе и за рубежом. Среди учеников Е. Н. Пелиновского уже 10 докторов наук, некоторые из них отмечены медалью Плиниуса Европейского геофизического союза (А. А. Куркин и И. И. Диденкулова), премией Президента РФ для молодых ученых (И. И. Диденкулова), медалью РАН за исследование волн-убийц (А. В. Слюняев).

Ефим Наумович Пелиновский приходит к своему юбилею полным творческих сил. Сердечно поздравляем Ефима Наумовича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, осуществления своих творческих планов, новых открытий и успехов!

Коллеги и редакционная коллегия журнала

Правила представления материалов в редакцию

1. Статьи, сообщения и другие материалы (на русском или английском языке), представляемые в редакцию, должны соответствовать **тематической направленности** журнала (фундаментальные основы гидрофизики; динамика и гидродинамика морских объектов; физические поля морских объектов, океана, атмосферы и их взаимодействие; методы и средства регистрации гидрофизических полей океана и морских объектов; информационные технологии в задачах гидрофизики, проектирования и эксплуатации морских объектов; экология гидросферы; гидробионика). Публикуются также **обзоры**, характеризующие современное состояние основных направлений исследований, **сообщения** о наиболее интересных научных конференциях и памятных датах, **материалы** научных дискуссий, **рецензии** на новые книги, **материалы** по истории гидрофизики.

2. В соответствии с п.2 ст.1286 гл.70 («Авторское право») Гражданского кодекса РФ между автором и редколлегией заключается **устный договор** о предоставлении права использования произведения, согласно которому автор, направляя свой материал в редакцию, автоматически передает редколлегии право на него до момента выхода в свет (с содержанием договора можно ознакомиться на сайте <http://hydrophysics.info>. В обязательном порядке к рукописи должно быть приложено **экспертное заключение** о возможности публикации материала в открытой печати.

3. В редакцию материалы следует представлять в электронном виде (в редакторе **Word**), предпочтительно по электронной почте или на любом электронном носителе и в распечатанном виде (лично или **простым письмом**) в одном экземпляре, подписанном автором (всеми авторами). Объем статьи не должен превышать **20 страниц**, научных сообщений – **8 страниц**, обзоров – **30 страниц** машинописного текста при печати **через 1.5 интервала шрифтом Times New Roman, кегль 12**.

4. **Первая страница** статьи должна содержать: индекс УДК; фамилии и инициалы всех авторов; полное название учреждения, от имени которого выступает каждый из авторов; название города, в котором находится учреждение; название статьи; аннотацию.

5. **Структура статьи** должна включать введение, основную часть и заключение. Основная часть может иметь свои заголовки и подзаголовки; **содержание статьи** должно отражать актуальность, цель и задачи исследования, методы и средства достижения цели и решение поставленных задач, результаты работы и их обсуждение, направление дальнейших исследований.

6. **Аннотация** должна повторять в кратком изложении структуру и содержание статьи. Предмет, цель работы указывается только в том случае, если они неясны из заглавия статьи. В аннотации приводятся основные новые теоретические и экспериментальные результаты работы, их научное и прикладное значение. Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками и предложениями, обсуждаемыми в статье. Текст аннотации должен быть связным. Аннотация **не должна** содержать ссылки на литературу. Следует избегать вводных фраз, сокращений и условных обозначений кроме общеупотребительных. Объем аннотации должен быть 150-250 слов. Текст аннотации **на английском языке** должен быть оригинальным, а не дословным переводом.

7. **Формулы** в текстовом файле должны быть выполнены в формульном редакторе MathType или Equation. Написание греческих и русских букв, цифр, математических операций и функций – **прямое**, латинских букв – **курсивное**, векторов – **прямое полужирное**. Рекомендуется сквозная нумерация формул, номер формулы ставится по правому краю листа в круглых скобках. Желательно нумеровать лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

8. **Таблицы и рисунки** должны помещаться в тексте по мере упоминания. Файлы рисунков (в одном из форматов *.tif, *.jpg или *.psx) и подрисовочные подписи должны быть представлены **дополнительно**. Обозначение осей (для русскоязычной статьи надписи должны быть **на русском языке** и цифры) не мельче 10 кегля. Черно-белые рисунки должны быть четкими и контрастными, при обоснованной необходимости возможна цветная печать.

9. **Список использованных источников** приводится в порядке упоминания в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования. В тексте ссылки даются в квадратных скобках, напр., [1]. Ссылки на неопубликованные работы **не допускаются**. При указании адреса сайта Интернета

обязательно указывается дата обращения. Библиографический список должен быть представлен на русском и английском языках. При оформлении списка **на английском языке** ссылки на англоязычные источники остаются без изменений; при наличии переводной версии статьи необходимо ссылаться на нее, остальные ссылки записываются транслитерацией (по ГОСТ 7.79-2000) с указанием языка оригинала (авторы – транслитерация, название – перевод, издание – транслитерация, в конце ссылки добавляется (in Russian)).

Примеры оформления

Книга:

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961. 350 с.
Теория управления. Ч.I. Теория линейных систем / Под ред. А.М.Воронова. М.: Высш. шк., 1986. 440 с.
Gelenbe E., Mitrani I. Analyzing and synthesis of computer systems. London: Academic Press, 1980. 280 p.
Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.;Л.: ОНТИ, 1937. 500 с. / Пер. С англ. Whitaker E.T. Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 430 p.

Статья в журнале:

Земляков С.Д. и др. Функциональная управляемость и настраиваемость систем // АиТ. 1986. № 2. С.21–30.
Alkhatib K. An analytical scheme for flight control systems // Aero J. 1985. V.89, N 889. P.353–361.

Сборник трудов конференции:

Ray A. A new methodology // Proc. 20th IEEE Conf. On Decision and Control. San Diego, 1981. P.1363–1369.
Ахов Б.Г. Создание блоков // Тр. 7-й Междун. конф. «Прикладные технологии». СПб.: Наука, 2006. С.21–25.

Препринт, депонированная рукопись и т.п.:

Глумов В.М. и др. Программное обеспечение блока. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1989. С.17–21.
Шмелев В.В. Метод точных штрафных функций. М., 1988. Деп. в ВИНТИ 9.03.1988, № 1904-B88. 18 с.

Авторское свидетельство:

Суворов Н.В. Методы оценки эффективности ресурсов: А.С. 163514 СССР // Б.И. 1986. № 13. С.44.

Электронный ресурс

Фундаментальная и прикладная гидрофизика. Правила для авторов. http://hydrophysics.info/?page_id=137 (дата обращения: 14.07.2014).

Книга в списке литературы на английском языке:

Марчук Г.И. и др. Математические модели геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоздат, 1987. 296 с.
Marchuk G.I. et al. Mathematical Models in Geophysical Hydrodynamics. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1987. 296 p. (in Russian).

Статья в журнале в списке литературы на английском языке:

Нелепо В.А. Создание системы диагноза и прогноза состояния океана // Морской гидрофиз. журнал. 1985. № 3. С.44–49.
Nelepo V.A. Development of a diagnostic and prognostic system of the ocean state. *Morsk. Gidrofiz. Zh.* 1985, 3, 44-49 (in Russian).

10. Решение о публикации материала редакция принимает после отработки автором замечаний рецензентов. Откорректированная рукопись должна быть подписана всеми авторами и выслана **простым письмом** в адрес редакции почтой или представлена лично.

11. **Дополнительно** к рукописи представляются **на русском и английском языках** в распечатанном и электронном виде: сведения о каждом из авторов (фамилия, имя, отчество, год рождения, место работы, должность, ученая степень и ученое звание, контактный телефон, e-mail); название статьи; аннотация; ключевые слова (до 7 слов) и список источников.

12. Рукописи, не соответствующие правилам редакции, к рассмотрению не принимаются. Рукописи не возвращаются.

Учредители:
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОФИЗИКА

Том 8 № 3 2015

Основан в 2008 г.
Выходит 4 раза в год
ISSN: 2073-6673

*Журнал издается под руководством
Отделения наук о Земле РАН*

Главный редактор
А. А. Родионов

Редакционный совет:

акад. Ж.И. Алфёров, А.В. Бабанин (*Австралия*), Б.П. Борисенко, С.М. Вертешев, И.В. Вильнит,
акад. Г.С. Голицын, А.В. Гусев, В.Ю. Дорофеев, П.И. Коротин, чл.-кор. Г.А. Леонов,
С. Массель (*Польша*), акад. Р.И. Нигматулин, В.Н. Носов, акад. В.Г. Пешехонов, К.И. Полжанов,
В.Н.Пылаев, чл.-кор. А.И. Рудской, акад. В.А. Румянцев, акад. А.А. Саркисов,
акад. Т. Соомере (*Эстония*), чл.-кор. Н.Н. Филатов, чл.-кор. Е.И. Якушенко

Редакционная коллегия:

И.В. Алёшин, Б.П. Белов, Ю.В. Гурьев, Л.С. Долин, В.Н. Емельянов, М.П. Иванов, О.Ю. Корнеев,
М.А. Кузьмицкий, Е.В. Кустова, В.В. Максимов, В.В. Малый, Г.С. Малышкин, С.К. Матвеев,
Е.Г. Морозов, Е.Н. Пелиновский, В.А. Рябченко, И.А. Селезнев, Е.В. Семенов,
Е.В. Софьина (*отв. секретарь*), И.В. Стурова, Ю.И. Троицкая, Г.А. Федотов, В.Р. Фукс, Т.А. Хантулева,
В.А. Царев, Д.В. Чаликов

Санкт-Петербург
Издательство «Наука»

© Российская академия наук, 2015
© Редколлегия журнала «Фундаментальная
и прикладная гидрофизика» (составитель), 2015

Учредители:

Российская академия наук
Отделение наук о Земле

Санкт-Петербургский научный центр РАН
Университетская наб., д.5, Санкт-Петербург, 199034
sppp@spbrc.nw.ru http://www.spbrc.nw.ru

Зав. редакцией *Н. Е. Покровская*
Редактор *А. В. Сторожевых*

Подписано к печати 01.09.2015 г. Дата выпуска в свет 25.09.2015 г. Формат 60×84¹/₈.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 6.3. Тираж 150 экз.
Тип. зак. № ____.

Изготовление оригинал-макета
Санкт-Петербургский научный центр РАН
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 5

Санкт-Петербургская издательско-книготорговая фирма «Наука»
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1
main@nauka.nw.ru
www.naukaspb.com

Адрес редакции: 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., д.5
Телефон (812)328-41-67
nsgf2008@yandex.ru
www.hydrophysics.info

Первая Академическая типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия В.О., 12.